CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**12 settembre 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Stabilire, motivando la risposta, se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN = B$. In caso affermativo, scrivere N.

   (a) Autovalori di A: $1/3$ con $\mu = m = 2$, 1 con $\mu = m = 1$.

   (b) $V_{1/3}(A) = \{x + z = 0\}$. $V_1(A) = \{x = y - z = 0\}$.

   (c) $V_{1/3}(A) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. $V_1(A) = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (d) Tale N non esiste. Infatti, se esistesse, A avrebbe la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore $1/3$ pari a 1.

---

2. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} -k & k-2 & k+2 & k \\ k+1 & 1 & k+3 & 1 \\ k-1 & 2-k & -k & 1-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
2	2	2	sì	2
-2	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq \pm 2 \\ 2 \text{ se } k = \pm 2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -2$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 2$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + 2y + t = 0 \right\}.$$

(a) Trovare una base ortogonale di U:

(b) Fornire delle equazioni cartesiane per il sottospazio $U^\perp$:

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U^\perp$:

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U:

Base: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ o anche $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Equazioni di $U^\perp$: $x - t = y - 2x = z = 0$.

Proiezione su $U^\perp$: $\boldsymbol{w}_\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Proiezione su U: $\boldsymbol{w}_\parallel = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**12 settembre 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Stabilire, motivando la risposta, se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN = B$. In caso affermativo, scrivere N.

   (a) Autovalori di A: $1/2$ con $\mu = 2$, $m = 1$, -1 con $\mu = m = 1$.

   (b) $V_{1/2}(A) = \{x - y = z = 0\}$. $V_{-1}(A) = \{x + 2y = z = 0\}$.

   (c) $V_{1/2}(A) = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $V_{-1}(A) = \text{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Tale N non esiste perché A non è diagonalizzabile.

---

2. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & k+4 & 1 \\ 1-k & k & -k-1 & -k \\ k-1 & -k-1 & k+3 & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = -2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
1	2	2	sì	2
-3	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1, -3 \\ 2 \text{ se } k = 1, -3. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -3$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 1$.

Soluzione per $k = -2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x + y + t = 0 \right\}.$$

(a) Trovare una base ortogonale di U:

(b) Fornire delle equazioni cartesiane per il sottospazio $U^\perp$:

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U^\perp$:

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U:

Base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Equazioni di $U^\perp$: $y - t = x - 2y = z = 0$.

Proiezione su $U^\perp$: $\boldsymbol{w}_\perp = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Proiezione su U: $\boldsymbol{w}_\parallel = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**12 settembre 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Stabilire, motivando la risposta, se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN = B$. In caso affermativo, scrivere N.

   (a) Autovalori di A: $1/3$ con $\mu = m = 1$, $2/3$ con $\mu = m = 1$, 1 con $\mu = m = 1$.

   (b) $V_{1/3}(A) = \{x = z = 0\}$.
   $V_1(A) = \{x + y = 2y + z = 0\}$.
   $V_{2/3}(A) = \{x = y + 2z = 0\}$.

   (c) $V_{1/3}(A) = \text{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   $V_1(A) = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   $V_{2/3}(A) = \text{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (d) N esiste: $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

---

2. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} -1-k & -k-3 & k+2 & -k-2 \\ 1 & k+6 & k+4 & 1 \\ k+1 & k+5 & -k-3 & k+3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -4$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-1	2	2	sì	2
-5	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -1, -5 \\ 2 \text{ se } k = -1, -5. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -5$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = -1$.

Soluzione per $k = -4$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + 2z + t = 0 \right\}.$$

(a) Trovare una base ortogonale di U:

(b) Fornire delle equazioni cartesiane per il sottospazio $U^\perp$:

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U^\perp$:

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U:

Base: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ o anche $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Equazioni di $U^\perp$: $x - t = z - 2x = y = 0$.

Proiezione su $U^\perp$: $\boldsymbol{w}_\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Proiezione su U: $\boldsymbol{w}_\parallel = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**12 settembre 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Stabilire, motivando la risposta, se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN = B$. In caso affermativo, scrivere N.

   (a) Autovalori di A: $1/2$ con $\mu = m = 1$

   (b) $V_{1/2}(A) = \{x = y - z = 0\}$.

   (c) $V_{1/2}(A) = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

   (d) A e B non sono simili ad esempio perché A non è diagonalizzabile, invece B è diagonale: tale N non esiste.

---

2. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 4-k & 1 & 2-k & 2 \\ 3-k & -1-k & k-1 & 2-2k \\ k-1 & 1+k & -k & 2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-1	2	2	sì	2
3	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -1, 3 \\ 2 \text{ se } k = -1, 3. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 3$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = -1$.

Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2z + t = 0 \right\}.$$

(a) Trovare una base ortogonale di U:

(b) Fornire delle equazioni cartesiane per il sottospazio $U^\perp$:

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U^\perp$:

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U:

Base: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ o anche $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Equazioni di $U^\perp$: $y - t = z - 2y = x = 0$.

Proiezione su $U^\perp$: $\boldsymbol{w}_\perp = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Proiezione su U: $\boldsymbol{w}_\parallel = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.