

Geometria e Algebra

Appello del 27 settembre 2019

| | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> 2 |
| <input type="checkbox"/> 3 |
| <input type="checkbox"/> 4 |
| <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> 6 |
| <input type="checkbox"/> 7 |
| <input type="checkbox"/> 8 |
| <input type="checkbox"/> 9 |

← Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

.....

.....

Domanda [openvectA] Sia dato uno spazio vettoriale V e una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V . Cosa sono le coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto alla base \mathcal{B} ? w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openvectB] Sia dato uno spazio vettoriale V . Come è definita la dimensione di V ? w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CATALOGO

Domanda [openvectC] Sia dato uno spazio vettoriale V e una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V . In quanti modi è possibile ottenere un vettore $v \in V$ come combinazione lineare di v_1, \dots, v_n ? Si motivi adeguatamente la risposta.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [openvectD] Si enunci il teorema della base.

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [applinapertaA] Si scriva una matrice A tale che l'applicazione lineare associata L_A sia una applicazione *non* iniettiva da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^4 .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [applinapertaA] Si scriva una matrice A tale che l'applicazione lineare associata L_A sia una applicazione iniettiva da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^4 .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [applinapertaC] Si scriva una matrice A tale che l'applicazione lineare associata L_A sia una applicazione suriettiva da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [applinapertaD] Si scriva una matrice A tale che l'applicazione lineare associata L_A sia una applicazione *non* suriettiva da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 .

w p a c

.....

.....

.....

.....

.....

Domanda [subcoordbA]

Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \right\}$ con base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; sia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$. Quale fra le seguenti affermazioni sulle coordinate di \mathbf{u} nella base \mathcal{B} è corretta?

- $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Domanda [subcoordbB]

Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0 \right\}$ con base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$.

Quale fra le seguenti affermazioni sulle coordinate di \mathbf{u} nella base \mathcal{B} è corretta?

- $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [subcoordbC]

Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = 0 \right\}$ con base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; sia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$.

Quale fra le seguenti affermazioni sulle coordinate di \mathbf{u} nella base \mathcal{B} è corretta?

- $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Domanda [subcoordbD]

Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z - t = 0 \right\}$ con base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$. Quale

fra le seguenti affermazioni sulle coordinate di \mathbf{u} nella base \mathcal{B} è corretta?

- $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [linsystemA] ♣ Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- Se il sistema ha infinite soluzioni allora $\text{rg } A = n$.
 Se $\text{rg } A = n$ allora il sistema ha un'unica soluzione per qualunque B .
 Se $k = n$ e $\det A \neq 0$, allora il sistema ha un'unica soluzione.
 Se $B = \mathbf{0}$ e $\text{rg}(A) < n$ il sistema ha soluzioni non banali.

Domanda [linsystemB] ♣ Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- Se il sistema ha infinite soluzioni, allora $\text{rg } A < n$.
 Se $\text{rg } A = \text{rg}(A|B) = n$, allora il sistema ha un'unica soluzione.
 Se $B = \mathbf{0}$, allora il sistema ammette solo la soluzione banale $X = \mathbf{0}_n$.
 Se $B = \mathbf{0}$ e $\text{rg } A$ è massimo, allora il sistema ammette un'unica soluzione.

Domanda [linsystemC] ♣ Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- Se $B = \mathbf{0}$ e $\text{rg } A = n$, allora il sistema ha solo la soluzione banale.
 Se il sistema ammette una sola soluzione allora $\text{rg } A = n$.
 Se $k = n$ allora il sistema ha sempre un'unica soluzione.
 Se il sistema è risolubile allora $\text{rg } A = n$.

Domanda [linsystemB] ♣ Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza.

- Se $B = \mathbf{0}$ e $\text{rg } A = k$ allora il sistema ha solo la soluzione banale.
- Se $B = \mathbf{0}$ e $\text{rg } A < n$ allora il sistema ha sicuramente infinite soluzioni.
- Se $k = n$ e $\text{rg } A = \text{rg}(A|B)$ il sistema ha un'unica soluzione.
- Se il sistema ha un'unica soluzione allora $k = n$.

Domanda [retteA] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è una retta nello spazio:

- $\begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Domanda [retteB] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è un piano nello spazio:

- $\begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 \end{cases}$

Domanda [retteC] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è una retta nello spazio:

- $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x + 6y + 3z = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Domanda [retteD] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è un piano nello spazio:

- $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 3x - 3y - 6z = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = -2 \end{cases}$

Domanda [prodscA] Quale delle seguenti è una base ortogonale di $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \right\}$?

- $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Nessuna

Domanda [prodscB] Quale delle seguenti è una base ortogonale di $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + t = 0 \right\}$?

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ Nessuna

Domanda [prodscc] Quale delle seguenti è una base ortogonale di $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0 \right\}$?

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 Nessuna

Domanda [prodscc] Quale delle seguenti è una base ortogonale di $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0 \right\}$?

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 Nessuna

Domanda [spanRCA] ♣ Siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- Se $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, allora $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 2$.
 Se $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, allora $\mathbf{u}_3 \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.
 Se $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 2$, allora $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 3$.
 Se $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 2$, allora $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ sono linearmente indipendenti.

Domanda [spanRCB] ♣ Siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- Se $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, allora $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono linearmente dipendenti.
 Se $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, allora $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 2$.
 Se $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 2$, allora $\mathbf{u}_3 \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.
 Se $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 2$, allora $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sono linearmente dipendenti.

Domanda [spanRCC] ♣ Siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- Se $\mathbf{u}_3 \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, allora $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 2$.
 Se $\mathbf{u}_3 \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, allora $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sono linearmente dipendenti.
 Se $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 1$, allora almeno uno dei tre vettori è diverso dal vettore nullo.
 Se $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 1$, allora $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \leq 1$.

Domanda [spanRCD] ♣ Siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale. Quali delle seguenti affermazioni sono **sicuramente** vere?

- Se $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \neq \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, allora $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono linearmente indipendenti.
 Se $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \neq \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, allora $\mathbf{u}_3 \notin \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.
 Se $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 2$, allora $\mathbf{u}_3 \in \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.
 Se $\dim \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 2$, allora uno dei tre vettori è combinazione lineare degli altri due.

Domanda [determinantetreptreA] Sia $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 3k & -1 \\ -1 & k & -1 \\ 1 & 2k & -1 \end{pmatrix}$ una matrice dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni $k \in \mathbb{R}$.

- $\det(A_k) = k^2$
 $\det(A_k) = -k^3$
 $\det(A_k) = -k$
 Nessuna delle precedenti risposte è vera.

CATALOGO

Domanda [determinantetreptreB] Sia $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 2k & 1 & 2 \\ 2k & 1 & 3 \end{pmatrix}$ una matrice dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni $k \in \mathbb{R}$.

$\det(A_k) = k^2$

$\det(A_k) = k^3$

$\det(A_k) = k$

Nessuna delle precedenti risposte è vera.

Domanda [determinantetreptreC] Sia $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2k & k & -2k \\ k & k & k \end{pmatrix}$ una matrice dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni $k \in \mathbb{R}$.

$\det(A_k) = -k^2$

$\det(A_k) = k^3$

$\det(A_k) = k^2$

Nessuna delle precedenti risposte è vera.

Domanda [determinantetreptreD] Sia $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & -2 \\ 2k & k & -2 \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$ una matrice dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni $k \in \mathbb{R}$.

$\det(A_k) = k$

$\det(A_k) = k^3$

$\det(A_k) = k^2$

Nessuna delle precedenti risposte è vera.