CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 settembre 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & -2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	3	no	—
1	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 1 \\ 2 \text{ se } k = 0, 1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \mathrm{Sol} = 3$ mai!

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano$\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r'.

   (d) Si calcoli lla distanza dell'origine da π

   (a) $r : y = 1, x + z = 2$.

   (b) $r' : y = 2, x + z = 1$.

   (c) $\pi : x + y + z = 3$.

   (d) $d(O, \pi) = \sqrt{3}$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$; sia inoltre $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

   (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

   (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

   Autovalori 0 con $\mu = m = 1$ e 5 con $\mu = m = 2$; semidefinita positiva; forma canonica: $\tilde{Q}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = 5y'^2 + 5z'^2$. $N = \begin{pmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. $X_0 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ per esempio (un qualunque vettore in Ker A).

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**27 settembre 2019**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & 1-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
1	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1 \\ 2 \text{ se } k = 1. \end{cases}$$

Risolubile per ogni k.

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 1$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano$\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r'.

   (d) Si calcoli lla distanza dell'origine da π

   (a) $r : y = -1, x - z = 3$.

   (b) $r' : y = -2, x - z = 2$.

   (c) $\pi : x - y - z = 4$.

   (d) $d(O, \pi) = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

   (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

   (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

   Autovalori 0 con $\mu = m = 1$ e -2 con $\mu = m = 2$; semidefinita negativa; forma canonica: $\tilde{Q}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -2x'^2 - 2y'^2$. $N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ per esempio (un qualunque vettore in $\operatorname{Ker} A$).

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 settembre 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k-3 & 2k-3 & 2k-3 \\ k-1 & 1-k & k-1 & 1 \\ 1-k & 3-k & 3-2k & 2-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
1	2	3	no	—
2	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1, 2 \\ 2 \text{ se } k = 1, 2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 1$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 1, 2$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano$\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r'.

   (d) Si calcoli lla distanza dell'origine da π

   (a) $r : y = 2, x + z = 3.$

   (b) $r' : y = 3, x + z = 2.$

   (c) $\pi : x + y + z = 5.$

   (d) $d(O, \pi) = \frac{5}{3}\sqrt{3}.$

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

   (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

   (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

   Autovalori: 4 con $\mu = m = 1$ e 2 con $\mu = m = 2$; definita positiva; forma canonica: $\tilde{Q}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2$. $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. X_0: la forma quadratica é definita positiva.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 settembre 2019
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} -k & 3-k & 5-2k & 5-2k \\ k-3 & 3-k & 3-k & 1 \\ k-1 & k-3 & 2k-5 & 2k-5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
2	2	3	no	–
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 2 \\ 2 \text{ se } k = 2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 2$.

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 2$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano$\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e B di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta r passante per A e B.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta r' parallela ad r e passante per il punto C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente r e r'.

   (d) Si calcoli lla distanza dell'origine da π

   (a) $r : y = -2, x + z = 1$.

   (b) $r' : y = -3, x + z = 2$.

   (c) $\pi : x + y + z = -1$.

   (d) $d(O, \pi) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; sia inoltre $Q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche μ e geometriche m.

   (b) Stabilire il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

   (c) Determinare una matrice ortogonale N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

   (d) Determinare esplicitamente un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$, **se esiste**. Altrimenti, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

   Autovalori: 0 con $\mu = m = 1$, 10 con $\mu = m = 1$ e -3 con $\mu = m = 1$; indefinita; forma canonica: $\tilde{Q}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 10y'^2 - 3z'^2$. $N = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ per esempio (un qualunque vettore in $\operatorname{Ker} A$).
