CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 gennaio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2k+1 & -k & 1 & 2k+1 \\ 2k & -2k & -k & 0 \\ -k+1 & 2k & k+2 & 2k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k \\ 3k \\ 2k+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
2	2	3	no	-
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 2 \\ 2 \text{ se } k = 0, 2. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq 2$.

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -15 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Fissato un riferimento cartesiano nello spazio si considerino il piano π_1 di equazione $x + y - z = 6$ e il piano π_2 di equazione $x - y + z = 4$.

   (a) Si determini una rappresentazione parametrica della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per O.

   (c) Si determini un punto P sulla retta r a distanza $\sqrt{2}$ dal punto di coordinate $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Si determini il coseno dell'angolo formato da due vettori direttori delle rette $r_1 = \pi_1 \cap \sigma$ e $r_2 = \pi_2 \cap \sigma$.

$r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\sigma\colon y + z = 0$

$P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oppure $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

I vettori direttori delle due rette sono multipli di $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dunque $\cos\theta = \dfrac{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{||\boldsymbol{v}_1|| \cdot ||\boldsymbol{v}_2||} = \pm\dfrac{1}{3}$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare quale/i tra i seguenti vettori sono autovettori di A esplicitandone l'autovalore corrispondente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

Sono autovettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ con autovalore -1 e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalore 1.

Autovalori: $\lambda_1 = 1$ con $\mu(1) = m(1) = 1$ e $\lambda_2 = -1$ con $\mu(-1) = m(-1) = 2$.

Una base di V_1 è $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Una base di V_{-1} è $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

A è diagonalizzabile poiché la somma delle molteplicità geometriche è $n = 3$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 gennaio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2k+1 & -k & 1 & k \\ 2k & -k+1 & -k & k+1 \\ -k+1 & 2k & 1 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k \\ 3k \\ 2k+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Determinare tutte le soluzioni per $k = 1$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0 \\ 2 \text{ se } k = 0. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 0$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3/4 \\ -3/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8pt)** Fissato un riferimento cartesiano nello spazio si considerino il piano π_1 di equazione $x+y-2z=10$ e il piano π_2 di equazione $x+y+z=4$.

   (a) Si determini una rappresentazione parametrica della retta $r=\pi_1\cap\pi_2$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per O.

   (c) Si determini un punto P sulla retta r a distanza $\sqrt{2}$ dal punto di coordinate $\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix}$.

   (d) Si determini l'angolo formato da due vettori direttori delle rette $r_1=\pi_1\cap\sigma$ e $r_2=\pi_2\cap\sigma$..

$r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\sigma\colon x-y=0$

$P=\begin{pmatrix}7\\-1\\-2\end{pmatrix}$ oppure $P=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$

I vettori direttori delle due rette sono multipli di $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. Dunque

$\cos\theta=\dfrac{\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle}{||\boldsymbol{v}_1||\cdot||\boldsymbol{v}_2||}=0.$

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$

   (a) Determinare quale/i tra i seguenti vettori sono autovettori di A esplicitandone l'autovalore corrispondente:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

È autovettore $\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ con autovalore 2.

Unico autovalore $\lambda_1=2$ con molteplicità $\mu(2)=3$ e $m(2)=2$.

Una base di V_2 è $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

La matrice non è diagonalizzabile poiché un autovalore (l'unico) non è regolare.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**27 gennaio 2020**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & -k & 2 & 2k+2 \\ 0 & -2k & -k & 0 \\ k+2 & 2k & k+4 & 2k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k \\ 3k \\ 2k+2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Determinare tutte le soluzioni per $k = -1$.

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
4	2	3	no	-
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 4 \\ 2 \text{ se } k = 0, 4. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq 4$.

$\dim \mathrm{Sol} = 3$ mai!

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Fissato un riferimento cartesiano nello spazio si considerino il piano π_1 di equazione $x - 2y + 5z = 2$ e il piano π_2 di equazione $x - 2y - 5z = 2$.

   (a) Si determini una rappresentazione parametrica della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per O.

   (c) Si determini un punto P sulla retta r a distanza $\sqrt{5}$ dal punto di coordinate $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Si determini il coseno dell'angolo formato da due vettori direttori delle rette $r_1 = \pi_1 \cap \sigma$ e $r_2 = \pi_2 \cap \sigma$..

$r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\sigma\colon 2x + y = 0$

$P = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ oppure $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

I vettori direttori delle due rette sono multipli di $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dunque $\cos\theta = \dfrac{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{||\boldsymbol{v}_1|| \cdot ||\boldsymbol{v}_2||} = \pm\dfrac{2}{3}$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 6 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare quale/i tra i seguenti vettori sono autovettori di A esplicitandone l'autovalore corrispondente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

Sono autovettori $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con autovalore 3 e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con autovalore 1 .

Autovalori $\lambda_1 = 3$ con molteplicità $\mu(3) = m(3) = 1$ e $\lambda_2 = 1$ con $\mu(1) = m(1) = 2$.

Una base di V_3 è $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Una base di V_1 è $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}$.

A è diagonalizzabile poiché la somma delle molteplicità geometriche è $n = 3$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	27 gennaio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2k-1 & 1-k & 1 & k-1 \\ 2k-2 & 2-k & 1-k & k \\ 2-k & 2k-2 & 1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k-2 \\ 3k-3 \\ 2k-1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\mathrm{rg}\, A$	$\mathrm{rg}\, \tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
1	2	3	no	—
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1 \\ 2 \text{ se } k = 1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 1$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 1$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ 5/3 \\ -11/6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8pt)** Fissato un riferimento cartesiano nello spazio si considerino il piano π_1 di equazione $-5x + y - 2z = -4$ e il piano π_2 di equazione $5x + 2y - 4z = 7$.

   (a) Si determini una rappresentazione parametrica della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ ortogonale a r e passante per O.

   (c) Si determini un punto P sulla retta r a distanza $\sqrt{5}$ dal punto di coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

   (d) Si determini il coseno dell'angolo formato da due vettori direttori delle rette $r_1 = \pi_1 \cap \sigma$ e $r_2 = \pi_2 \cap \sigma$..

$r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$\sigma\colon 2y + z = 0$

$P = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ oppure $P = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

I vettori direttori delle due rette sono multipli di $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Dunque $\cos\theta = \dfrac{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle}{||\boldsymbol{v}_1|| \cdot ||\boldsymbol{v}_2||} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

---

3. **(8pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$

   (a) Determinare quale/i tra i seguenti vettori sono autovettori di A esplicitandone l'autovalore corrispondente:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

È autovettore $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ con autovalore -2. Unico autovalore è $\lambda_1 = -2$ con molteplicità $\mu(-2) = 3$ e $m(-2) = 2$.

Una base di V_2 è $\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}$. La matrice non è diagonalizzabile poiché un autovalore (l'unico) non è regolare.
