Geometria e Algebra — Appello del 18 febbraio 2020

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...) pena l'esclusione. Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`opendefxxA`] Dare la **definizione** di autovalore di una matrice quadrata $n \times n$.

☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`opendefxxB`] Dare la **definizione** di autovettore di una matrice quadrata $n \times n$.

☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`opendefxxC`] Dare la **definizione** di matrice diagonalizzabile.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`opendefxxD`] Dare la **definizione** di autospazio di una matrice quadrata $n \times n$.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`ranksysA`] Dare un esempio di sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite che abbia un'unica soluzione, motivando la risposta.

☐ **w** ☐ **p** ☐ **a** ■ **c**

....

....

....

....

....

....

Domanda [`ranksysB`] Dare un esempio di sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite che abbia l'insieme delle soluzioni di dimensione 2, motivando la risposta. ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

Domanda [`ranksysC`] Dare un esempio di sistema lineare di 4 equazioni in 3 incognite che abbia l'insieme delle soluzioni di dimensione 1, motivando la risposta. ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

Domanda [`ranksysD`] Dare un esempio di sistema lineare di 2 equazioni in 4 incognite che abbia l'insieme delle soluzioni di dimensione 3, motivando la risposta. ☐**w** ☐**p** ☐**a** ■**c**

Domanda [`teospettA`] ♣ Sia A una matrice **simmetrica** 3×3. Sapendo che 1 è autovalore di A con autospazio $V_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y = 0 \}$, stabilire quali affermazioni sono necessariamente vere:

- ■ A possiede un autovalore $\lambda \neq 1$ con $V_\lambda = V_1^\perp$.
- □ La molteplicità algebrica di 1 è 3.
- □ Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.
- ■ Esistono 3 autovettori di A ortogonali tra loro.

Domanda [`teospettB`] ♣ Sia A una matrice quadrata 3×3 tale che $A^{\mathrm{T}} = A$, con autovalori $\{1, 2, 3\}$. Stabilire quali affermazioni sono necessariamente vere:

- □ A non è simile a una matrice diagonale.
- ■ Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A.
- ■ Gli autospazi V_1, V_2, V_3 sono due a due ortogonali.
- ■ $\dim V_1 = 1$.

Domanda [`teospettC`] ♣ Sia A una matrice 3×3 tale che $A^{\mathrm{T}} = A$, i cui unici autovalori sono 2 e 3. Stabilire quali affermazioni sono necessariamente vere:

- ■ $\forall \boldsymbol{u} \in V_2$, $\forall \boldsymbol{w} \in V_3$, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$.
- □ $\dim V_2 + \dim V_3 = 2$.
- □ Entrambi gli autovalori hanno molteplicità geometrica 1.
- ■ Esiste una matrice 3×3 invertibile M tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

Domanda [`teospettD`] ♣ Sia A una matrice 3×3 tale che $A^{\mathrm{T}} = A$, e 4 sia un autovalore di A con autospazio $V_4 = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Stabilire quali affermazioni sono necessariamente vere:

- ■ Esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{\mathrm{T}}AM$ è una matrice diagonale.
- □ Esiste una matrice diagonale M tale che $M^{\mathrm{T}}AM$ è ortogonale.
- □ A ha tre autovalori regolari.
- ■ Se $X \in \mathbb{R}^3$ è un autovettore di A non proporzionale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora è ad esso ortogonale.

Domanda [`geomspazA`] Quale dei seguenti sistemi è la rappresentazione *cartesiana* di una *retta* nello spazio.

- □ $\begin{cases} x - y = 0 \end{cases}$
- ■ $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$
- □ $\begin{cases} x = 2t \\ y = t + 2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$
- □ $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 2z = 7 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Domanda [`geomspazB`] Quale dei seguenti sistemi è la rappresentazione *cartesiana* di un *piano* nello spazio.

- ■ $\begin{cases} x - y = 0 \end{cases}$
- □ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$
- □ $\begin{cases} x = 2t + s + 1 \\ y = t \\ z = t + s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$
- □ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 3y + 6z = 1 \end{cases}$

Domanda [geomspazC] Quale dei seguenti sistemi è la rappresentazione *cartesiana* di una *retta* nello spazio.

□ $\begin{cases} x+2y=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x=2t \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

Domanda [geomspazD] Quale dei seguenti sistemi è la rappresentazione *cartesiana* di un *piano* nello spazio.

■ $\begin{cases} x-y=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} 6x-3y+4z=2 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x=t+s+1 \\ y=3t \\ z=t-s \end{cases} \quad t,s\in\mathbb{R}$

□ $\begin{cases} 6x+2y+4z=2 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$

Domanda [sistemiA] ♣ Si supponga che X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

□ $2X_1$ è soluzione del sistema $2A\,X = B$.
■ $X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $A\,X = \mathbf{0}$.
□ Il vettore $Y = X_2 - 3X_1$ appartiene a $\operatorname{Ker} A$.
□ Se il rango di A è massimo, allora necessariamente $X_1 = X_2$.

Domanda [sistemiB] ♣ Si supponga che X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

■ $-X_1$ è soluzione del sistema $A\,X = -B$.
□ $X_1 - 2X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $A\,X = \mathbf{0}$.
■ Il vettore $Y = 2X_2 - 2X_1$ appartiene a $\operatorname{Ker} A$.
■ Se $\operatorname{rg} A = n$, allora necessariamente $X_1 = X_2$.

Domanda [sistemiC] ♣ Si supponga che X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

■ $2X_2$ è soluzione del sistema $A\,X = 2B$.
□ $X_1 + X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $A\,X = \mathbf{0}$.
■ Il vettore $Y = X_2 - X_1$ appartiene a $\operatorname{Ker} A$.
□ Se il rango di A è massimo, allora non esistono altre soluzioni.

Domanda [sistemiD] ♣ Si supponga che X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $A\,X = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

■ $X_1 + 2X_2$ è soluzione del sistema $A\,X = 3B$.
□ $2X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $A\,X = \mathbf{0}$.
■ Il vettore X_1 non appartiene a $\operatorname{Ker} A$.
■ Se $\operatorname{rg} A < n$, allora il sistema ha infinite soluzioni.

Domanda [`matprodA`] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quale fra i seguenti è il corretto valore del prodotto AB:

■ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [`matprodB`] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quale fra i seguenti è il corretto valore del prodotto AB:

□ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [`matprodC`] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Quale fra i seguenti è il corretto valore del prodotto AB:

□ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [`matprodD`] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Quale fra i seguenti è il corretto valore del prodotto AB:

□ $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Domanda [`orthogsfA`] Sia $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$. Dire quale dei seguenti vettori appartiene al complemento ortogonale $U^\perp$:

□ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Domanda [`orthogsfB`] Sia $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Dire quale dei seguenti vettori appartiene al complemento ortogonale $U^\perp$:

□ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [`orthogsfC`] Sia $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Dire quale dei seguenti vettori appartiene al complemento ortogonale $U^\perp$:

□ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Domanda [orthogsfD] Sia $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Dire quale dei seguenti vettori appartiene al complemento ortogonale $U^\perp$:

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domanda [eigvalplainA] Siano A una matrice 3×3 e $p_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera.

☐ $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
☐ $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
■ $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$.
☐ $p_A(t)$ *non* è totalmente decomponibile in $\mathbb{R}$, cioè *non tutte* le sue radici sono reali.

Domanda [eigvalplainB] Siano A una matrice 3×3 e $p_A(t) = -t^3 + t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera.

■ $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
☐ $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità geometrica $m = 2$.
☐ $t = 0$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 3$.
☐ $p_A(t)$ *non* è totalmente decomponibile in $\mathbb{R}$, cioè *non tutte* le sue radici sono reali.

Domanda [eigvalplainC] Siano A una matrice 3×3 e $p_A(t) = -t^3 + t^2$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera.

☐ $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 2$.
☐ $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 2$.
☐ $\dim \mathrm{Ker}\, A = 2$.
■ $p_A(t)$ è totalmente decomponibile in $\mathbb{R}$, cioè *tutte* le sue radici sono reali.

Domanda [eigvalplainD] Siano A una matrice 3×3 e $p_A(t) = -t^3 - t$ il suo polinomio caratteristico. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera.

☐ $t = 1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 2$.
■ $t = 0$ è autovalore di A con molteplicità geometrica $m = 1$.
☐ $t = -1$ è autovalore di A con molteplicità algebrica $\mu = 1$.
☐ $p_A(t)$ è totalmente decomponibile in $\mathbb{R}$, cioè *tutte* le sue radici sono reali.