Foglio di esercizi n.3 del 26/10/2018

ESERCIZIO 1: Sia $k<n$ e denotiamo con $\mathbb{R}^k_-$ e $\mathbb{R}^{n-k}_+$ rispettivamente i sottospazi di $\mathbb{R}^n$ generati dai primi k vettori della base canonica / dagli ultimi $n-k$.

(1) Verificare che il grafico di una funzione liscia $f: U \to \mathbb{R}^{n-k}_+$, dove U è aperto di $\mathbb{R}^k_-$ è una sottovarietà di dimensione k in $\mathbb{R}^n$. Qui il grafico di f è identificato a $\Gamma_f = \{ x + f(x) \mid x \in \mathbb{R}^k_- \}$.

(2) Sia M sottovarietà di dimensione k in $\mathbb{R}^n$ e $p \in M$. Dimostrare che M coincide con il grafico di una funzione $f: \mathbb{R}^k_- \to \mathbb{R}^{n-k}_+$ in un intorno di $p \Leftrightarrow T_pM \cap \mathbb{R}^{n-k}_+ = \{0\}$.

ESERCIZIO 2 Sia $f: M \to N$ mappa liscia tra varietà e assumiamo $\dim M = m$, $\dim N = n$. Assumiamo che Z sia sottovarietà di N di dimensione r. Dato $p_0 \in M$ tale che $f(p_0) \in Z$, dimostrare che se $\operatorname{Im} d_{p_0}f + T_{f(p_0)}Z = T_{f(p_0)}N$ allora in un intorno di p_0 $f^{-1}(Z)$ è sottovarietà di dimensione $m-n+r$.

ESERCIZIO 3 Siano M, N varietà di dimensione m e n rispettivamente. Mostrare che una sottovarietà P di $M \times N$ di dimensione m coincide con il grafico di una mappa C^∞ $f: U \to N$, con U aperto di M, in un intorno di un punto $p_0 = (m_0, n_0) \in P$ se e solo se $T_{p_0}P \cap (\{0\} \times T_{n_0}N) =$

ESERCIZIO 4 Sia $f: M \to N$ una mappa C^∞ tale che tutti i punti di f siano regolari [diremo che f è una sommersione] e $\varphi: P \to N$ una mappa $\mathcal{C}^\infty$. Poniamo $X = \{(p,m) \in P \times M \mid \varphi(p) = f(m)\}$.

1) Mostrare che X è una sottovarietà liscia di $P \times M$ e $\dim X = \dim M + \dim P - \dim N$.

[sugg: detta Δ la diagonale in $M \times M$, $X = F^{-1}(\Delta)$ dove $F(p,m) = (\varphi(p), f(m))$ ....]

2) Discutere se l'ipotesi che f sia una sommersione può essere sostituita dall'ipotesi più debole che f sia $\mathcal{C}^\infty$

3) Mostrare che la mappa $\pi_P: X \to P$ $(p,m) \mapsto p$, è una sommersione.

4) Verificare che X soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni diagramma commutativo di mappe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g_M"] \arrow[d, "g_P"'] & M \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

esiste un'unica $g: Y \to X$ differenziabile t.c. $g_M = \pi_M \circ g$ e $g_P = \pi_P \circ g$.

Tale proprietà caratterizza X?

ESERCIZIO 5 Sia $\pi : M \to N$ una sommersione. Si dimostri che π è una mappa aperta.
Assumendo che π sia anche suriettiva si dimostri che una funzione $g : N \to P$ è $C^\infty \Leftrightarrow g \circ \pi : M \to P$ è C^∞.

ESERCIZIO 6 Si dimostri che le mappe seguenti sono sommersioni

(1) $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{K}P^n$ $\pi(X) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(X)$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(2) $S^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^n$ $\pi(X) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X)$

(3) $S^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n$ $\pi(X) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(X)$ [qui identifichiamo S^{2n+1} con l'insieme dei vettori unitari in $\mathbb{C}^n$

(4) $\pi : \Omega \to \mathcal{G}$, $\pi(X) = \mathrm{Im}\, X$
dove Ω l'aperto nello spazio delle matrici 4×2 formato dalle matrici di rango 2 e detto $\mathcal{G}$ lo spazio dei piani in $\mathbb{R}^4$
[cfr. es. n. 5 foglio 1]

(4) $\pi : TM \to M$ $\pi(x, v) = x$
dove M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ e $TM = \{(x,v) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in M, v \in T_pM\}$.

Per ciascuno dei casi precedenti discutere la topologia della fibra su un punto.

ESERCIZIO 7: Si consideri la funzione
$$S : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^k \to P(\mathbb{R}^{n+1} \otimes \mathbb{R}^{k+1}) = \mathbb{R}P^{nk+n+k}$$
data da $S([X],[Y]) = [X \otimes Y]$

1) dimostare che è C^∞ [osservare che $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^k$
$(X, Y) \mapsto ([X],[Y])$ è una sommersione e applicare esercizio 5...]

2) Mostrare che tale mappa è un embedding.

ESERCIZIO 8

1) Mostrare che se $\{X_1, X_2\}$ e $\{Y_1, Y_2\}$ sono basi di uno stesso piano W in $\mathbb{R}^4$ allora $X_1 \wedge X_2$ è multiplo di $Y_1 \wedge Y_2$ in $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$. Viceversa mostrare che se $X_1 \wedge X_2$ e $Y_1 \wedge Y_2$ sono multipli e non nulli allora $\mathrm{Span}(X_1, X_2) = \mathrm{Span}(Y_1, Y_2)$.

2) Detta $\mathcal{G}$ la varietà dei 2 piani in $\mathbb{R}^4$ mostrare che la mappa $\varphi: \mathcal{G} \to \Lambda^2 \mathbb{R}^4$ definita associando a W la retta generata in $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ da $X_1 \wedge X_2$, dove $\{X_1, X_2\}$ è base di W, è C^∞ [la struttura differenziale su $\mathcal{G}$ è definita nell'esercizio 5, foglio 1. Si suggerisce di utilizzare l'esercizio 5 di questo foglio e l'esercizio 6]

3) Mostrare che φ è un embedding.

ESERCIZIO 9

Sia $S^1 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

Si consideri la mappa $X: S^1 \to \mathbb{R}^2$ $\quad X\binom{x}{y} = \binom{-y}{x}$.

(1) Si verifichi che $X\binom{x}{y} \in T_{\binom{x}{y}} S^1 \quad \forall \binom{x}{y} \in S^1$ e che il campo di vettori $\left(X\binom{x}{y} \right)_{\binom{x}{y} \in S^1}$ è liscio.

(2) Si calcoli il flusso di tale campo.

(3) Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri il campo di vettori su $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ definito da $X_\lambda(p, q) = (X(p), \lambda X(q))$ dove si è usata l'identificazione $T_{(p,q)} \mathbb{T} = T_p S^1 \times T_q S^1$.
Si calcoli il flusso di X_λ.

(4) Si mostri come tale flusso è periodico $\iff \lambda \in \mathbb{Q}$

(5) Si mostri che se $\lambda \in \mathbb{Q}$ ogni linea di flusso è una curva regolare chiusa.

Viceversa se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dimostrare che ogni linea di flusso è densa.

ESERCIZIO 10 Sia M sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di dim k.

Posto $TM = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid X \in M \text{ e } Y \in T_X M\}$ e

$$T^1M = \{(X,Y) \in TM \mid \|Y\| = 1\}$$

e detta $\pi_M : TM \to M$, $\pi_M(X,Y) = X$, si dimostri che per ogni aperto coordinato U esistono diffeomorfismi

$\varphi : \pi_M^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ $\qquad \hat{\varphi} : \pi_M^{-1}(U) \cap T^1M \to U \times S^{k-1}$

t.c. i diagrammi seguenti commutino

$$\begin{tikzcd} \pi_M^{-1}(U) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_M"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_M^{-1}(U) \cap T^1M \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_M"'] & & U \times S^{k-1} \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

dove π_1 è la proiezione canonica sul primo fattore.

ESERCIZIO 11 ★

Sia $S^3 = \left\{ \binom{z}{w} \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}$. Si consideri la mappa $\mathcal{H} : S^3 \to S^2$ ottenuta componendo la proiezione canonica $\pi : S^3 \to \mathbb{CP}^1$ con il diffeomorfismo $\varphi : \mathbb{CP}^1 \to S^2$ descritto nell'esercizio 7 foglio 1.

(1) mostrare che $\mathcal{H}$ è una sommersione. Mostrare che $\binom{iz}{iw} \in T_{\binom{z}{w}} S^3$ e che $\binom{iz}{iw}$ genera $\operatorname{Ker} d_{\binom{z}{w}} \mathcal{H}$.

(2) Mostrare che $X\binom{z}{w} = \binom{-w}{z} \in T_{\binom{z}{w}} S^3 \quad \forall \binom{z}{w} \in S^3$ e che la collezione $\left(X\binom{z}{w}\right)_{\binom{z}{w}\in S^3}$ definisce un campo tangente a S^3.

(3) Mostrare che $X\binom{z}{w} \notin \operatorname{Ker} d_{\binom{z}{w}} H \quad \forall \binom{z}{w} \in S^3$

(4) Consideriamo la mappa

$$S^3 \xrightarrow{\hat{H}} T^1 S^2$$

$$\hat{H}\binom{z}{w} = \left(H\binom{z}{w}, \frac{Y\binom{z}{w}}{\left\| Y\binom{z}{w} \right\|} \right) \quad \text{dove} \quad Y\binom{z}{w} = d_{\binom{z}{w}} H \left(X\binom{z}{w} \right) \in T_{H\binom{z}{w}} S^2$$

Dimostrare che $\hat{H}$ è un locale diffeomorfismo.

[Fissato $\binom{z}{w}$ calcolare come varia $Y\binom{e^{i\theta}z}{e^{i\theta}w}$ al variare di θ]

(5) Verificare che $\hat{H}\binom{z}{w} = \hat{H}\binom{z'}{w'} \iff \binom{z}{w} = \pm \binom{z'}{w'}$.

Dedurre che $T^1 S^2$ è omeomorfo a $\mathbb{R}P^3$ e in particolare non è omeomorfo a $S^2 \times S^1$.