Foglio di esercizi n. 6 del 23/11/2018

ESERCIZIO 1:

(1) Fissato G gruppo abeliano, una varietá M e un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ di M consideriamo $\mathcal{Z}$ l'insieme dei G-cocicli su M subordinati al ricoprimento $\mathcal{U}$.

(a) Si dimostri che se $(g_{\alpha\beta})$ e $(g'_{\alpha\beta}) \in \mathcal{Z}$ allora l'insieme di funzioni $g''_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \cdot g'_{\alpha\beta} \in \mathcal{Z}$

(b) Si verifichi che l'operazione $(g_{\alpha\beta}) \cdot (g'_{\alpha\beta}) = (g''_{\alpha\beta})$ del punto precedente induce una struttura di gruppo abeliano su $\mathcal{Z}$.

(c) Si dimostri che $(g_{\alpha\beta}) \sim (g'_{\alpha\beta}) \Leftrightarrow (g_{\alpha\beta}) \cdot (g'_{\alpha\beta})^{-1} \sim (1)$ e si verifichi che l'insieme dei cocicli equivalenti al cociclo unitario é un sottogruppo di $\mathcal{Z}$.

(d) Si concluda che l'insieme delle classi di equivalenza dei G-cocicli, $\mathcal{H}$, ha una naturale struttura di gruppo in modo che $\mathcal{Z} \to \mathcal{H}$ sia un omomorfismo.

(2) Sia $G = (\mathbb{R}, +)$, si dimostri che ogni G-cociclo é banale [sugg.: dato $(g_{\alpha\beta})$ si definisca $\lambda_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ $\lambda_\alpha(x) = \sum_\gamma \rho_\gamma(x) g_{\alpha\gamma}(x)$ ....]

ESERCIZIO 2: Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrato vettoriale di rango 2 orientabile. Si dimostri che il fibrato é banale se e solo se esiste una sezione mai nulla.
Si verifichi che eliminando l'ipotesi sull'orientabilità o sul rango, l'asserto non è più vero.

ESERCIZIO 3: Diamo che una varietà F gode della proprietà di estensione se data una varietà M, una mappa C^∞ $f: U \to F$ e un chiuso di M, A contenuto in U esiste $\tilde{f}: M \to F$ C^∞ che coincide con f in un intorno di A.

(1) dimostrare che se F è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$ allora gode della proprietà di estensione

(2) Mostrare che se F gode della proprietà di estensione e $E \xrightarrow{\pi} M$ é un fibrato banale a fibra F allora data una sezione locale $\sigma: U \to E$ definita su un intorno U di chiuso A di M esiste una sezione globale $\tilde{\sigma}: M \to E$ che coincide con σ in un intorno di A.

(3) Se F gode della proprietà di estensione mostrare che ogni fibrato $\pi: E \to M$, M compatta, ammette una sezione globale [sugg: si fissi un ricoprimento finito $\{U_i\}_{i=1..n}$ su cui il fibrato si banalizza e si fissi un raffinamento finito $\{V_i\}_{i=1...n}$ con $V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$ $\cup V_i = M$. Si costruisca ricorsivamente una sezione σ_i definita in un intorno di $\overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_i$]

(5) Nelle ipotesi del punto precedente si dimostri che se $\sigma : U \to E$ é una sezione definita su un intorno di un chiuso A allora $\exists\ \tilde{\sigma} : M \to E$ sezione globale che coincide con σ su qualche intorno di A.

(6) Nelle ipotesi dei punti precedenti verificare che due sezioni $\sigma_1\ \sigma_2$ di E sono omotope [sugg: si costruisca su $M \times [0,1]$ il fibrato $p^*(E)$ dove $p : M \times [0,1] \to M$ é proiezione canonica, fissato $A = M \times \{0,1\}$ e $U = M \times [0, \frac{1}{3}) \cup M \times (\frac{2}{3}, 1]$ si consideri la sezione $\tau : U \to p^*(E)$ $\tau(x,t) = \begin{cases} \sigma_1(x) & t < \frac{1}{3} \\ \sigma_2(x) & t > \frac{2}{3} \end{cases}$ e si applichi punto precedente]

ESERCIZIO 4 Sia G un gruppo di diffeomorfismi di F e supponiamo che G abbia una struttura di varietá in modo che le operazioni di gruppo e l'azione $G \times F \to F$ siano C^∞. Fissato un G-fibrato a fibra F si consideri $\mathcal{P}(E_x) = \{ f : E_x \longrightarrow F \mid f \text{ é } G\text{-compatibile} \}$.

Poniamo $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{P}(E_x)$ e fissata una banalizzazione locale (U, φ) consideriamo la mappa indotta
$\mathcal{P}(\varphi) : \mathcal{P}(E)|_U \to U \times G$ t.c. $\mathcal{P}(\varphi)_x(f) = f \circ \varphi_x^{-1}$.

(1) Verificare che esiste una struttura di G-fibrato su $\mathcal{P}(E)$ tale che $(U, \mathcal{P}(\varphi))$ sia banalizzazione locale $\forall$ banalizzazione (U, φ) di E.

(2) Dimostrare che $\tau : U \to \mathcal{P}(E)$ è sezione liscia se e soltanto se la mappa di fibrati $\hat{\tau} : E|_U \to U \times F$ definita da $\hat{\tau}_x = \tau(x)$ è $\mathcal{C}^\infty$.

(3) Dedurre che se G è diffeomorfo a $\mathbb{R}^N$ ogni G-fibrato è banale.

ESERCIZIO 5 Sia $\pi : E \to M$ fibrato vettoriale e sia F sottofibrato di E

(1) dimostrare che esiste un sottofibrato L tale che $E_x = F_x \oplus L_x \quad \forall x \in M$. [sugg: fissare un prodotto scalare...]

(2) Dedurre che esiste un morfismo di fibrati vettoriali $\sigma : E/F \to E$ t.c. $p \circ \sigma = id$ dove $p : E \to E/F$ è proiezione

(3) Dedurre che E è isomorfo a $F \oplus E/F$.

ESERCIZIO 6 Sia H_K il gruppo delle matrici triangolari superiori A t.c. $A_{ii} = 1$ $\forall i = 1 \dots K$, e $\tilde{H}_K$ il gruppo delle matrici triangolari superiori invertibili (reali o complesse)

(1) Dimostrare che un fibrato vettoriale $\pi: E \to M$ ammette riduzione ad $\tilde{H}_K$ se e solo se $\exists$ sottofibrati $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_K = E$ t.c. $\dim F_i = i$.

(2) Dimostrare che il fibrato ammette riduzione ad H_K se in più F_1 è banale e F_{i+1}/F_i è banale per $i = 1 \dots K-1$.

(3) Dedurre che ogni fibrato vettoriale che ammette riduzione ad H_K è banale, e osservare che tale fatto può essere dimostrato anche utilizzando l'esercizio 4.

ESERCIZIO 7 :

(1) Si dimostri che il grado di una funzione da una varietà compatta in $\mathbb{R}^K$ è sempre 0.

(2) Sia $M^{(n)}$ varietà compatta e N sottovarietà di $M \times \mathbb{R}^K$ di dimensione K. Si dimostri che N interseca in modo trasverso $M \times \{0\}$ se e soltanto se 0 è valore regolare di $p|_N : N \to \mathbb{R}$ dove $p: M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è proiezione.

(3) Si deduca che in $M \times \mathbb{R}^K$ non esistono sottovarietà cpt che intersecano M trasversalmente in un solo punto.

(4) Sia L una linea proiettiva in $\mathbb{C}P^2$. Dimostrare che il fibrato normale ad L è non banale [osservare che in

un intorno tubolare di L é sempre possibile trovare un'altra retta proiettiva L' e $L \cap L' = \{1 pt\} \dots]$

ESERCIZIO 8 Sia M una varietá C^∞ e si consideri $\Delta_M = \{(x,y) \in M \times M \mid x = y\}$.

(1) Si dimostri che Δ_M é una sottovarietá chiusa di $M \times M$ diffeomorfa a M

(2) Si dimostri che il fibrato normale di $M \times \{0\}$ in $M \times M$ é banale, mentre il fibrato normale di Δ_M in $M \times M$ é isomorfa a $T\Delta_M$.

(3) Si deduca che non esiste un diffeo di $S^2 \times S^2$ t.c. $f(S^2 \times \{0\}) = \Delta_{S^2}$.

ESERCIZIO 9 Sia G un gruppo che soddisfa le ipotesi dell'esercizio 4. Sia $K < G$, diciamo che una sottovarietá H di G realizza uno splitting topologico di G rispetto a K se $\forall g \in G$ la classe laterale gK interseca H in un unico punto $r(g)$ in modo che $g \mapsto r(g)$ sia C^∞.

(1) Verificare che i seguenti sono splitting topologici

(a) $G = GL^+(n, \mathbb{R})$, $K = SL(n, \mathbb{R})$, $H = \{\lambda Id \mid \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$ con $r(A) = \frac{trA}{n} I$.

(b) $G = GL(n, \mathbb{R})$, $K = O(n, \mathbb{R})$ $H = \{A \mid A = A^T \; A > 0\}$ con $r(A) = \sqrt{{}^T\!A A}$

(c) $G = GL(n,\mathbb{C})$, $K = SL(n,\mathbb{C})$
$\mathcal{H} = \{\lambda \, \mathrm{Id} \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$

(2) Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibrato e si consideri su $\mathcal{P}(E_x) = \{\varphi : E_x \to F \text{ compatibili}\}$ la relazione di equivalenza
$\varphi \sim \psi$ se $\psi^{-1}\varphi \in K$.
Si ponga $\mathcal{R}_K(E_x) = \mathcal{P}(E_x)/\sim$
Si dimostri che se $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è una riduzione di E a gruppo strutturale K allora $\forall \alpha, \beta$ t.c. $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ si ha $(\varphi_\alpha)_x \sim (\varphi_\beta)_x$. e si deduca che è ben definito un elemento $\rho_{\mathcal{U}}(x) \in \mathcal{R}_K(E_x)$ t.c. $\varphi \in \mathcal{P}(E_x)$ è compatibile con la struttura di K-fibrato indotta da $\mathcal{U} \iff [\varphi] = \rho_{\mathcal{U}}(x)$.

(3) Fissata una G banalizzazione locale $\varphi : E|_U \to U \times F$ dimostrare che la mappa $\tilde{\varphi}_x : \mathcal{R}(E_x) \to \mathcal{H}$ definita da $\tilde{\varphi}_x([f]) = r(f \circ \varphi^{-1})$ è biunivoca

(4) Posto $\mathcal{R}_K(E) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{R}_K(E_x)$, $\forall$ G-banalizzazione locale di F (U, φ), si consideri la mappa $\tilde{\varphi} : \mathcal{R}(E)|_U \to U \times \mathcal{H}$ definita da $\tilde{\varphi}(f) = (\pi(f), \tilde{\varphi}_{\pi(f)}(f))$.
Mostrare che esiste un'unica struttura di G-fibrato a fibra $\mathcal{H}$ su $\pi : \mathcal{R}_K(E) \to M$ tale che $(U, \tilde{\varphi})$ è banalizzazione compatibile per ogni banalizzazione (U, φ) di E.

(5) Verificare che se $\mathcal{U}$ è riduzione del fibrato a gruppo strutturale K allora $\rho_{\mathcal{U}}$ è sezione liscia di $\mathcal{R}_K(E)$.

(6) Fissata una sezione liscia ρ di $\mathcal{R}_K(E)$ e data una banalizzazione locale $\varphi : E|_U \to U \times G$ poniamo $\lambda : U \to H$ data da $\lambda(x) = \tilde{\varphi}(\rho_{\mathcal{U}}(x))$. Sia ψ la banalizzazione data da $\psi_x = \lambda(x) \circ \varphi_x$. Dimostrare che $[\psi_x] = \rho_{\mathcal{U}}(x)$ $\forall x \in U$

(7) Dimostrare che la corrispondenza tra K-riduzioni di E e sezioni di $\mathcal{R}_K(E)$ data da $\mathcal{U} \to \rho_{\mathcal{U}}$ è biunivoca.

(8) Dedurre che se H è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$ tutti i fibrati ammettono riduzione a gruppo strutturale K.

ESERCIZIO 10 Verificare che un fibrato complesso E ammette riduzione a gruppo strutturale $SL(\kappa, \mathbb{C})$ se e solo se esiste una sezione mai nulla di $\Lambda^\kappa E$.

ESERCIZIO 11 Diciamo che un gruppo G di diffeomorfismi di F è connesso se $\forall g_0, g_1 \in G$ $\exists$ $\varphi : [0,1] \times F \to F$ $\mathcal{C}^\infty$ t.c. $\varphi_t : F \to F$ è diffeo in G con $\varphi_0 = g_0$ e $\varphi_1 = g_1$.

(1) Sia $G < GL(\kappa, \mathbb{K})$ pensato come gruppo di diffeomorfismi di $\mathbb{K}^n$. Mostrare che G è connesso nel senso sopra $\Leftrightarrow$ connesso per archi nel senso usuale.

(2) Dimostrare che se G è connesso ogni G fibrato su S^1 è banale.

(3) Mostrare con un esempio che (2) non è vero se si sostituisce S^1 con S^2.