Foglio n.7 del 30/11/2018

ESERCIZIO 1: Si consideri $\tau_n = \{(\ell,\xi) \in \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \mid \xi \in \ell\}$ e sia $\pi: \tau_n \to \mathbb{K}P^n$, $\pi(\ell,\xi) = \ell$.

(1) Si dimostri che τ_n ha una naturale struttura di fibrato vettoriale reale ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) / complesso ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) di rango 1

(2) Si determini una banalizzazione di τ_n sugli aperti affini $U_i = \{[x_0:\dots:x_n] \in \mathbb{C}P^n \mid x_i \neq 0\}$ e si determini il cociclo di transizione.

(3) Si dimostri che π non è mai fibrato banale [sugg: se lo fosse mostrare che esisterebbe omeo $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^*$ e dedurne la contraddizione]

ESERCIZIO 2: Fissato un funzionale $\varphi \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$ non nullo si consideri la sezione $\sigma_\varphi \in \Gamma(\mathbb{R}P^n, \tau_n^*)$ definita da $\sigma_\varphi(\ell) = \varphi|_\ell$.

(1) Dimostrare che σ_φ è C^∞.

(2) Determinare il luogo dove σ_φ si annulla.

(3) Verificare che σ_φ interseca la sezione nulla in modo trasverso.

(4) Mostrare che $\mathbb{R}P^{n-1}$ in $\mathbb{R}P^n$ non ammette un equazione globale e dimostrare che il fibrato normale di $\mathbb{R}P^{n-1}$ in $\mathbb{R}P^n$ è isomorfo a $\tau_{n-1}^* \to \mathbb{R}P^{n-1}$.

ESERCIZIO 3: Sia $\pi: E \to M$ fibrato vettoriale reale di rango 1. Assumendo M compatta mostrare che $\exists\, N$ e una mappa $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi: M \to \mathbb{R}P^N$ tale che E é isomorfo a $\varphi^*(\tau_N)$.
[sugg: si consideri un'inclusione i di E nel fibrato banale $M \times \mathbb{R}^{N+1}$ e si ponga $\varphi(x) = i(E_x)$]

ESERCIZIO 4: Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrato non orientabile di rango r e sia $\hat{M} = \{(x,\xi) \in \Lambda^r E \mid h_x(\xi,\xi)\}$ dove $(h_x)_{x \in M}$ é un prodotto scalare su $\Lambda^r E$.
Posto $p: \hat{M} \to M$ la mappa $p(x,\xi) = x$, si verifichi che $p^*(E) \to \hat{M}$ é un fibrato orientabile.

ESERCIZIO 5: Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e sia $V_{\mathbb{R}}$ il soggiacente spazio vettoriale reale.

(1) Dimostrare che esiste un'orientazione su $V_{\mathbb{R}}$ t.c. se $\{v_1 \dots v_n\}$ é una $\mathbb{C}$-base allora $\{v_1, iv_1, v_2, iv_2, \dots, v_n, iv_n\}$ é una $\mathbb{R}$-base positiva.

(2) Verificare che ogni isomorfismo $\mathbb{C}$-lineare tra spazi vettoriali complessi preserva l'orientazione indotta sullo spazio vettoriale reale soggiacente.

(3) Mostrare che ogni fibrato vettoriale reale soggiacente ad un fibrato vettoriale complesso ammette una naturale orientazione.

ESERCIZIO 6: Sia $p: \mathbb{R} \to S^1$ $p(x) = e^{2\pi i x}$ e poniamo $\tau: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\tau(x) = x+1$.

(1) Mostrare che se $E \xrightarrow{\pi} S^1$ é un fibrato vettoriale di rango r allora esiste un isomorfismo di fibrati a base variabile

$$\begin{array}{ccc} p^*(E) & \xrightarrow{T} & p^*(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{R} \end{array}$$

tale che $E \cong p^*(E)/\sim$ dove $\xi \sim \eta \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : \xi = T^k \eta$.

(2) Mostrare che due fibrati $E \xrightarrow{\pi} S^1$ e $E' \xrightarrow{\pi'} S^1$ sono isomorfi se e solo se $\exists$ isomorfismo $\psi: p^*(E) \to p^*(E')$ tale che $\psi \circ T = T' \circ \psi$ dove T e T' sono come al punto precedente.

(3) Fissata un'orientazione su $p^*(E)$ verificare che E é orientabile se e solo se T preserva l'orientazione.

(4)* Verificare che un fibrato orientabile su S^1 é banale.
[sugg: Dal punto (2) é sufficiente costruire $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \to p^*(E)$ t.c. $\psi \circ T_0 = T \circ \psi$ dove $T_0(x, \xi) = (x+1, \xi)$. Fissata una banalizzazione globale di $p^*(E)$ in modo che $T(x, \xi) = (x+1, A(x)\xi)$ con $A(x) \in GL^+(r)$. Posto $\psi(x, \xi) = (x, \alpha(x)\xi)$ la condizione $\psi \circ T_0 = T \circ \psi$ è equivalente ad $\alpha(x+1) = A(x)\,\alpha(x)$. $(*)$
Verificare che $\exists\ \alpha: \mathbb{R} \to GL^+(r)$ che verifica $(*)$]