Esercizi di Istituzione di Geometria Superiore.

A.A. 2018/19

Foglio di esercizi n. 1 del 12/10/2018

ESERCIZIO 1: Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si consideri su $\mathbb{K}P^n$ l'atlante di carte $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0\dots n}$ dove

1) $U_i = \{[t_0 : \dots : t_n] \in \mathbb{K}P^n \mid t_i \neq 0\}$
2) $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{K}^n$ é definita da

$$\varphi_i([t_0 : \dots : t_n]) = \left(\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_{i-1}}{t_i}, \frac{t_{i+1}}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}\right)$$

- Si dimostri che $\mathcal{A}$ è un atlante differenziale su $\mathbb{K}P^n$.
- Detta $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}P^n$ la proiezione canonica si dimostri che una funzione $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, dove U é aperto di $\mathbb{K}P^n$, é liscia rispetto alla struttura differenziale indotta da $\mathcal{A}$ se e solo se $f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ é liscia nel senso usuale
- Sia X varietà differenziabile e $f : X \longrightarrow \mathbb{K}P^n$. Dimostrare che f è liscia per la struttura differenziale indotta da $\mathcal{A}$ se e solo se $\forall\, x \in X$ $\exists\, U$ intorno di x in X e $\tilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ liscia tale che $f|_U = \pi \circ \tilde{f}$.

ESERCIZIO 2: Siano X, Y varietà differenziali. Dimostrare che una mappa $\varphi: X \to Y$ è liscia se e solo se per ogni $f: Y \to \mathbb{R}$ liscia $f \circ \varphi$ è liscia.

ESERCIZIO 3: Siano X, Y varietà differenziali di dimensione n e m rispettivamente. Siano $\mathcal{A}_X = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{a}}$ un atlante differenziale compatibile con la struttura differenziale su X e $\mathcal{A}_Y = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ atlante compatibile con la struttura differenziale su Y. Per ogni $(\alpha, \beta) \in \mathcal{a} \times \mathcal{B}$ sia $\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^{n+m}$ definita da

$\varphi_\alpha \times \psi_\beta (p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q))$. Si dimostri che $\mathcal{A} = \{U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{a} \times \mathcal{B}}$ è un atlante differenziale su $X \times Y$.

Si dimostri che le proiezioni canoniche $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ sono lisce rispetto a questa struttura differenziale.

Si verifichi che una mappa φ da una varietà $\mathcal{C}^\infty$ Z in $(X \times Y, \mathcal{A})$ è liscia se e solo se $\pi_X \circ \varphi : Z \to X$ e $\pi_Y \circ \varphi : Z \to Y$ sono lisce.

ESERCIZIO 4: Sia A un insieme e $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottinsiemi di A t.c. $\bigcup_i A_i = A$. Assumiamo che $\forall i$ sia $\varphi_i : A_i \to U_i$ mappa biunivoca, dove U_i è aperto di $\mathbb{R}^n$. Assumiamo inoltre che $\forall i, j$ $\varphi_i(A_i \cap A_j)$ è aperto di $\mathbb{R}^n$ e che la mappa di transizione

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(A_i \cap A_j) \to \varphi_j(A_i \cap A_j)$ sia un diffeomorfismo.

1) mostrare che $\exists!$ topologia su A che rende gli A_i aperti e tale che $\varphi_i : A_i \to U_i$ è omeomorfismo

2) verificare che se tale topologia è T_2 a base numerabile A munita di tale topologia è una varietà topologica e $\mathcal{A} = \{(A_i, \varphi_i)\}$ è un atlante differenziale.

3) Si consideri l'insieme $A = \mathbb{R} \cup \{i\}$ e sia $A_1 = \mathbb{R}$ $A_2 = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{i\}$ e poniamo $\varphi_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ $\varphi_1 = id_{\mathbb{R}}$ e $\varphi_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ $\varphi_2(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \neq i \\ 0 & \text{se } x = i \end{cases}$. Si dimostri che il sistema $\{(A_1, \varphi_1), (A_2, \varphi_2)\}$ soddisfa le ipotesi ma che la topologia indotta su A non è T_2.

ESERCIZIO 5*: Fissati due numeri interi $1 \leq i < j \leq 4$ sia $W_{ij} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}^4}(e_i, e_j)$ il piano coordinato (i,j) in $\mathbb{R}^4$ e sia $\pi_{ij} : \mathbb{R}^4 \to W_{ij}$ proiezione ortogonale

Sia $\mathcal{G} = \{W \subset \mathbb{R}^4 \mid W$ è un sottospazio lineare di dimensione $2\}$

1. Fissato $W \in \mathcal{G}$ e $\{X_1, X_2\}$ base di W si dimostri che $\pi_{ij} : W \to W_{ij}$ è un isomorfismo se e solo se $\det [X_1 | X_2]_{(i,j)}^{*} \neq 0$
2. Detto $\mathcal{G}_{ij} = \{W \in \mathcal{G} \mid \pi_{ij} : W \to W_{ij}$ è isomorfismo$\}$ si dimostri che $\mathcal{G} = \bigcup_{(i,j)} \mathcal{G}_{ij}$
3. Fissato un multi-indice (i,j) sia (k,h) il multi-indice complementare. Fissato $W \in \mathcal{G}_{ij}$ e fissata una base $\{X_1, X_2\}$ di W si mostri che la matrice 2×2 $Z_W = [X_1, X_2]_{\{k,h\}} [X_1 | X_2]^{-1}_{(i,j)}$ non dipende dalla scelta della base

* $A_{(i,j)}$ = sottomatrice di A ottenuta selezionando le righe i e j.

4. Si dimostri che le mappe

$\varphi_{ij}: \mathcal{G}_{ij} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sono biezioni e che il sistema definito da $\{(\mathcal{G}_{ij}, \varphi_{ij})\}$ verifica le ipotesi dell'esercizio 4.

5. Si dimostri che $\forall A \in GL(4,\mathbb{R})$ la mappa indotta $T_A: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ definita da $T_A(W) = A(W)$ è un omeomorfismo per la struttura topologica indotta. Dedurre che la topologia è T_2 [utilizzando una T_A opportuna mostrare che è sufficiente separare W_{12} e W_{34} ....]

6. Sia Ω aperto di $M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ formato dalle matrici di rango 2 e sia $\pi: \Omega \to \mathcal{G}$ definita da $\pi(X) = \operatorname{Im} X = \operatorname{Span}(X_1, X_2)$ dove X_1, X_2 sono le colonne di X. Verificare che π è continua.

7. Dedurre che $\mathcal{G}$ è compatta e che quindi munita dell'atlante $\{(\mathcal{G}_{ij}, \varphi_{ij})\}$ è un atlante differenziale.
[sugg. Se $F = \{X \in \Omega \mid \|X_1\| = \|X_2\| = 1 \;\; X_1 \cdot X_2 = 0\}$, allora F è compatto e $\pi(F) = \ldots$]

8. Dimostrare che $\pi: \Omega \to \mathcal{G}$ è liscia. Inoltre

$f: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ è liscia $\Leftrightarrow$ $f \circ \pi: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ è liscia.

ESERCIZO 7 Si dimostri che la mappa

$$\varphi : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow S^2$$

definita da

$$\varphi([z:w]) = \left(\frac{Re(z\bar{w})}{|w|^2+|z|^2}, \frac{Im(z\bar{w})}{|w|^2+|z|^2}, \frac{|w|^2-|z|^2}{|w|^2+|z|^2} \right)$$

è un ben definito diffeomorfismo.

ESERCIZIO 8. Sia X varietà differenziale $p \in X$ e denotiamo con $\mathcal{C}^\infty_p$ lo spazio dei germi delle funzioni lisce intorno a p. Verificare che la mappa $\mathcal{C}^\infty(X) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_p$ che associa a f il suo germe in p, f_p, è suriettiva.

Foglio di esercizi n. 2 del 20/10/2018

ESERCIZIO 1 Sia M varietà differenziabile e sia p un punto su M. Denotiamo con $\mathcal{C}^\infty_p$ lo spazio dei germi di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ intorno a p e con $m_p = \{[f] \in \mathcal{C}^\infty_p \mid f(p)=0\}$.

(1) Verificare che m_p è l'unico ideale massimale di $\mathcal{C}^\infty_p$

(2) Siano $x_1 \dots x_n$ coordinate locali intorno a p con $x_i(p)=0$. Verificare che m_p è generato da (i germi di) $x_1 \dots x_n$

(3) Mostrare che la mappa

$$m_p \ni f \longmapsto d_p f \in (T_p M)^*$$

è un omomorfismo suriettivo di spazi vettoriali il cui nucleo è m_p^2

ESERCIZIO 2* Con le notazioni del precedente esercizio poniamo $m_p^\infty = \bigcap_{k=1}^{+\infty} m_p^k$

(1) Verificare che il germe di f appartiene a m_p^∞ se e solo se tutte le derivate dell'espressione di f in una carta $(x_1 \dots x_n)$ svaniscono. Dedurre che $m_p^\infty \neq \{0\}$.

(2) Fissata $f \in m_p^\infty$ verificare che $\exists\, g \in m_p^\infty$ t.c. $\lim_{q \to p} \frac{f(q)}{g(q)} = 0$. [sugg. verificare che $\frac{f}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \in m_p^\infty$]

(3) Mostrare che m_p^∞ non è un ideale finitamente generato.

ESERCIZIO 3: Sia $F: M \to N$ funzione liscia tra varietà differenziabili. Due campi $X \in \mathfrak{X}(M)$ $Y \in \mathfrak{X}(N)$ si dicono F-correlati se $d_pF(X_p) = Y_{F(p)}$ $\forall p \in M$.

1. Mostrare che se X e Y sono F correlati e $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ è una linea di flusso per X allora $F \circ \alpha$ è una linea di flusso per Y.
2. Dedurre che se X è completo anche Y é completo e che vale il viceversa assumendo che F sia propria.
3. Nell'ipotesi che entrambi i campi siano completi mostrare che $F \circ \varphi_t^X = \varphi_t^Y \circ F$, dove φ_t^X e φ_t^Y denotano i flussi generati da X e Y.
4. Mostrare con un esempio che in generale la completezza di Y non implica la completezza di X.

ESERCIZIO 4 Sia $F: M \to N$ mappa C^∞.
Siano $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ in modo che entrambe le coppie X_1, Y_1 e X_2, Y_2 siano F-correlate (vedi esercizio 3). Verificare che i campi $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ siano F-correlati.
[sugg: si osservi che $X_1(f \circ F) = Y_1(f) \circ F \ldots$]

ESERCIZIO 5 Si M una sottovarietà chiusa di N.
Dimostrare che ogni campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ si estende ad un campo di vettori $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ (dove implicitamente consideriamo $T_pM \subset T_pN$ $\forall p \in M$)
Dimostrare che se X e Y sono campi su M e $\tilde{X}, \tilde{Y}$ estensioni arbitrarie $[\tilde{X}, \tilde{Y}]|_M = [X, Y]$.
[sugg. Dire che $\tilde{X}$ estende X è equivalente a dire che X e $\tilde{X}$ sono ι-compatibili, dove $\iota: M \longrightarrow N$ è l'inclusione.]

ESERCIZIO 6 Fissato $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ si consideri la proiezione canonica $\pi: \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{KP}^n$.

1) Dato $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $p_0 \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $v \in \mathbb{K}^{n+1} = T_{p_0}\mathbb{K}^{n+1} = T_{\lambda p_0}\mathbb{K}^{n+1}$ verificare che $d_{p_0}\pi(v) = d_{\lambda p_0}\pi(\lambda v)$
2) Detto X_0 il campo radiale su $\mathbb{K}^{n+1}$ ($X_0(p) = p$) si mostri che $\operatorname{Ker} d_{p_0}\pi = \operatorname{Span}(X_0(p))$.
3) Sia X un campo vettoriale su $\mathbb{K}^{n+1}$ tale che $X(\lambda p) = \lambda X(p)$. Verificare che $\exists$ un campo vettoriale $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{KP}^n)$ tale che X e Y sono π-correlati.
4) Dato un campo X su $\mathbb{K}^{n+1}$ dimostrare che esiste un campo Y su $\mathbb{KP}^n$ che è π-correlato a X se e solo se
$X(\lambda p) - \lambda X(p) \in \operatorname{Span} X_0(p)$ $\forall p \in \mathbb{K}^{n+1}, \lambda \in \mathbb{K}^*$
5) Dimostrare che $\forall Y$ campo su $\mathbb{KP}^n$ $\exists X \in \mathfrak{X}(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})$ tale che X e Y sono π-correlati. [sugg: definire X_i sulla

controimmagine degli aperti $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ in modo che X_i e Y siano π-correlati. Usare poi una partizione dell'unità per costruire X]

ESERCIZIO 7

(1) Verificare che due carte locali $(x_1 \ldots x_n)$ e $(y_1 \ldots y_n)$ su un aperto U di una varietà $M^{(n)}$ definiscono gli stessi campi di coordinate se e solo se $\exists\ \tau_i \in \mathbb{R}$ t.c.

$$y_i \equiv x_i + \tau_i \ .$$

(2) Dimostrare che esistono $X_1 \ldots X_n$ campi di vettori su M t.c. (i) $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ è base di T_pM, (ii) $[X_i, X_j] \equiv 0$ se e solo se esiste un atlante compatibile le cui funzioni di transizione sono traslazioni.

ESERCIZIO 8

Sia S^3 la sfera dei vettori unitari in $\mathbb{R}^4$.

(1) Verificare che S^3 è una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ t.c. $T_pS^3 = p^\perp$ nell'identificazione $T_pS^3 \subset \mathbb{R}^4$

(2) Si verifichi che i seguenti campi

$$X_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ t \\ -z \end{pmatrix} \qquad X_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ t \\ x \\ -y \end{pmatrix} \qquad X_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

si restringono a campi tangenti su S^3 t.c. $\{X_1(p), X_2(p), X_3(p)\}$ è base di T_pS^3 $\forall p \in S^3$.

(3) Si calcoli $[X_1, X_2]$ controllando che si restringa a campo tangente su S^3.

(4) Si calcolino esplicitamente i flussi φ_t, ψ_s di X_1, X_2 controllando che non commutino.

(5) Si verifichi che

$[X_1, X_2](p) = \dot{\alpha}(0)$

dove $\alpha(t) = -\psi_{-\sqrt{t}} \circ \varphi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \varphi_{\sqrt{t}}(p)$.

ESERCIZIO 9: Sia M una varietà differenziale e sia $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una famiglia di mappe lisce tali che la mappa $M \times \mathbb{R} \ni (p,t) \mapsto \varphi_t(p) \in M$ risulti liscia. Si supponga inoltre che $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ e $\varphi_0 = id_M$. Dimostrare che esiste un unico campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ di cui $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è il flusso.

ESERCIZIO 10: Sia $M = GL_n(\mathbb{R})$ con la struttura differenziale indotta come aperto dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$.
Fissato $X_0 \in M_n(\mathbb{R})$ si consideri il campo di vettori su M definito da $X(A) = X_0 A$

(1) Si calcoli il flusso φ del campo X.

(2) Fissata un altra matrice Y_0 e posto $Y(A) = Y_0 A$ si dimostri che $[X,Y](A) = A Z_0$ dove $Z_0 = X_0 Y_0 - Y_0 X_0$

(3) Fissata $A \in M$ si consideri la famiglia di vettori $\xi_t \in T_A M = M_n(\mathbb{R})$ definita da

$$\xi_t = d_{\varphi_t(A)}(\varphi_{-t})\left(Y(\varphi_t(A))\right).$$

Verificare che $[X,Y](A) = \frac{d}{dt}\xi_t\Big|_{t=0}$

(4) Verificare che $[X,Y](A)=\dot{\alpha}(0)$ dove

$\alpha(t) \doteq -\psi_{-\sqrt{t}} \circ \varphi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \varphi_{\sqrt{t}}(A)$

essendo ψ il flusso del campo Y.

ESERCIZIO 11 Sia $q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma quadratica non degenere e sia $S_q=\{X\in\mathbb{R}^n \mid q(X)=1\}$.

(1) Verificare che S_q è una sottovarietà chiusa di dim $n-1$ in $\mathbb{R}^n$ (se non vuota).

(2) Detta $\langle\, , \rangle_q$ la forma bilineare simmetrica associata a q mostrare che $\forall X\in S_q$ $T_X S_q=\{Y\in\mathbb{R}^n \mid \langle X,Y\rangle_q=0\}$.

(3) Se n_+ è l'indice di positività e n_- l'indice di negatività di q mostrare che S_q è diffeomorfa a $S^{n_+-1}\times\mathbb{R}^{n_-}$.

(4) Si verifichi che $E=\{(X,Y)\in\mathbb{R}^{2n} \mid X\in S_q,\ Y\in T_X S_q\}$ è una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^{2n}$ di dimensione $2n-1$