Foglio di esercizi di Istituzioni di Geometria

4 ottobre 2017

Esercizio 1

1. Dimostrare che ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ammette una famiglia fondamentale di intorni $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tale che
   - $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ e le inclusioni $U_{i+1} \setminus x \to U_i \setminus \{x\}$ sono equivalenze omotopiche.
   - $H_k(U_i \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) = 0$ se $k \neq 0, n$ mentre $H_{n-1}(U_i \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
2. Utilizzando il punto precedente si mostri che che $\{V_j\}_{j\in I}$ è una qualsiasi famiglia fondamentale di intorni di x esiste $j_0 \in I$ tale che $H_{n-1}(V_{j_0} \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) \neq 0$.
3. Dedurre dai punti precedenti che un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e un aperto V di $\mathbb{R}^k$ non sono omeomorfi se $k \neq n$.

Esercizio 2 Siano M, N, P varietà differenziabili e siano $\pi_M : M \times N \to M$ e $\pi_N : M \times N \to N$ le proiezioni canoniche.

1. Dimostrare che π_M e π_N sono mappe lisce.
2. Dimostrare che una mappa $f : P \to M \times N$ è liscia se e solo se sono lisce le composizioni $\pi_M \circ f : P \to M$ e $\pi_N \circ f : P \to N$ sono lisce.

Esercizio 3 Siano M e N varietà differenziabili. Mostrare che una mappa $\phi : M \to N$ è liscia se e solo se per ogni funzione liscia $f : N \to \mathbb{R}$ la composizione $f \circ \phi : M \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia.

Esercizio 4 Sia X una varietà topologica di dimensione n. Data una struttura differenziabile $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ un omeomorfismo F di M si denoti con $F \cdot \mathcal{A}$ un atlante le cui carte sono della forma $(F(U_i), \phi_i \circ F)$.

1. Dimostare che $F \cdot \mathcal{A}$ è l'unica struttura differenziabile su X tale che la mappa
$$F : (X, \mathcal{A}) \to (X, F \cdot \mathcal{A})$$
sia un diffeomorfismo.
2. Mostrare che $(F \circ G) \cdot \mathcal{A} = F \cdot (G \cdot \mathcal{A}))$ per ogni coppia di omeormofismi F, G di X.
3. Mostrare che F è un diffeomorfismo per la variet differenziale $(X, \mathcal{A})$ se e solo se $F \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Esercizio 5 [Varietà per incollamento] Sia A un insieme e supponiamo di avere una decomposizione in sottoinsiemi $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ e per ogni A_i supponiamo di fissare una funzione biunivoca $\psi_i : A_i \to U_i$ dove U_i è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo infine che per ogni i, j la mappa di transizione
$$\psi_{ji} : \psi_i(A_i \cap A_j) \to \psi_j(A_i \cap A_j)$$
sia liscia.

1. Dimostrare che esiste un'unica topologia su A per cui i sottoinsiemi A_i sono aperti e le mappe ψ_i sono omeomorfismi.

2. Se I è numerabile dimostrare che la topologia ottenuta è a base numerabile.

3. Mostrare con un esempio che in generale la topologia non è Hausdorff.

4. Mostrare che se per ogni $p, q \in A$ esiste un $i \in I$ tale che p, q sono entrambi contenuti in A_i allora la topologia ottenuta è di Hausdorff.

5. Mostrare che se la topologia è di Hausdorff e a base numberabile allora esiste un'unica struttura di varietà differenziale su A tale che le mappe ψ_i sono diffeomorfismi.

Esercizio 6 Nell'ipotesi dell'esercizio precedente si supponga che la topologia su A sia di Hausdorff. Si dimostri che per ogni successione $x_n \in \psi_i(A_i \cap A_j) \subset U_i$ convergente in U_i tale che $\phi_{ji}(x_n)$ converga in U_j si ha che $\lim x_n \in \psi_i(A_i \cap A_j)$.

Vale il viceversa? (ovvero che se questa proprietà è verificata dalle mappe di transizione allora A è di Hausdorff)

Esercizio 7 Data una varietà differenziabile M si dimostri che esiste una funzione liscia $f : M \to (0, +\infty)$ tale che $f{-}1(0, M]$ è compatto per ogni $M > 0$.

[Hint: si consideri un'esaustione di M in compatti e una partizione dell'unità subordinata....]

Esercizio 8 Sia $p : \tilde{M} \to M$ un rivestimento topologico numerabile (nel senso che la controimmagine di ciascun punto è numerabile).

1. Si dimostri che se M è una varietà differenziabile allora $\tilde{M}$ è una varietà topologica e che esiste su $\tilde{M}$ un'unica struttura differenziabile che rispetto alla quale p è liscia.

2. Si dimostri che gli automorfismi di rivestimento sono mappe lisce rispetto a tale struttura.

3. Si assuma ora che $\tilde{M}$ sia una varietà differenziabile e che il rivestimento sia regolare (ad esempio il rivestimento universale). Si dimostri che esiste un'unica struttura di varietà differenziabile su M che rende p liscia se e solo se gli automorfismi di rivestimento sono mappe lisce rispetto alla struttura di $\tilde{M}$.

Esercizio 9 Si dimostri che $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è un aperto dello spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ e che l'applicazione $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ data da $A \mapsto A^{-1}$ è C^∞.

Esercizio 10 Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita e supponiamo $\dim W \leq \dim V$. Si dimostri che $\mathrm{Hom}_{(\mathrm{k})}(V, W) = \{L \in \mathrm{Hom}(V, W) \,|\, \mathrm{Im}\, L = W\}$ è un aperto di $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Esercizio 11[Le grassmanniane – la topologia] Fissati due numeri naturali $1 \leq k < n$, si consideri l'insieme $G(n, k)$ dei k-piani lineari in $\mathbb{R}^n$. Tale insieme è detto Grasmanniana dei k piani in $\mathbb{R}^n$.

Data una matrice $n \times k$ A di rango k denotiamo con $[A]$ il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generao dalle colonne di A.

1. Sia $L_A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare definita da $L_A(X) = AX$. Dimostrare che $[A] = \mathrm{Im}\, L_A$.

2. Se $M_{(k)}(n, k)$ è lo spazio delle matrici $n \times k$ di rango k verificare che l'applicazione $\pi : M_{(k)}(n, k) \to G(n, k)$ definita da $A \to [A]$ è suriettiva. Nel seguito considereremo su $G(n, k)$ la topologia pi debole che rende π continua.

3. Dimostrare che $[A] = [B]$ se e solo se esiste una matrice $G \in GL(k, \mathbb{R})$ tale che $A = BG$

4. Sia $O(n, k)$ l'insieme delle matrici $k \times n$ le cui colonne formano un sistema ortonormale di k-vettori in $\mathbb{R}n$. Mostrare che $O(n, k)$ è compatto in $M_{(k)}(n, k)$ e che $\pi(O(n, k)) = G(n, k)$.

Esercizio 12[**Le grasmanniane –la struttura differenziale**] Sia W_0 un sottospazio di dimensione k in $\mathbb{R}^n$. Fissiamo una base ortonormale $\{X_1, \ldots, X_k\}$ di W_0 e sia A_0 la matrice $k \times n$ le cui colonne sono precisamente $X_1, \ldots, X_k$. Consideriamo infine il sottospazio della Grasmanniana definito in questo modo:

$$G(n, k)_{W_0} = \{W \in G(n, k) | W \cap W_0^{\perp} = \{0\}\}$$

1. Mostrare che $\ker A_0^T = W_0^{\perp}$.

2. Dedurre che $[A] \in G(n, k)_{W_0}$ se e solo se $\det(A_0^T A) \neq 0$.

3. Dedurre che $G(n, k)_{W_0}$ è aperto in $G(n, k)$.

4. Sia $\mathcal{C} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$. Per ogni sottoinsieme $I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}$ di k elementi di $\{1, \ldots, n\}$ sia A_I la matrice le cui colonne siano formate da $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ e $W_I = [A_I]$. Verificare che per ogni matrice A la matrice $A_I^T A$ è la matrice $k \times k$ ottenuta cancellando le $n - k$ righe di A corrispondenti a indici che non sono in I. Dedurre che $G(n, k) = \bigcup_I G(n, k)_{W_I}$.

5. Dato $\psi \in Hom(W_0, W_0^{\perp})$ sia $W_{\psi} = \{X + \psi(X) | X \in W_0\}$. Mostrare che W_{ψ} è un k-piano, ovvero $W_{\psi} \in G(n, k)_{W_0}$.

6. Mostrare che la funzione $\sigma_{W_0} : Hom(W_0, W_0^{\perp}) \to G(n, k)_{W_0}$ definita da $\sigma_{W_0}(\psi) = W_{\psi}$ è biunivoca.

7. Sia $[A] \in G(n, k)_{W_0}$. Verificare che per ogni $v \in W_0$ l'intersezione del $(n - k)$ piano affine $v + W_0^{\perp}$ con il k piano $[A]$ è il vettore di $\mathbb{R}^n$ dato da $A(A_0^T A)^{-1} A_0^T v$. [Hint: l'intersezione è unica per la condizione che $[A] \in G(n, k)_{W_0}$. Dunque è sufficiente verificare che $A(A_0^T A)^{-1} A_0^T v - v \in W_0^{\perp}$]

8. Dedurre che σ_{W_0} è omeomorfismo.

9. Dati due elementi $W_1, W_2 \in G(n, k)$ mostrare che esiste W_0 tale che $W_1, W_2 \in G(n, k)_{W_0}$. Dedurre che $G(n, k)$ è uno spazio di Hausdorff (e per l'ultimo punto dell'esercizio precedente anche compatto).

10. Verificare che $\{(G(n, k)_W, \sigma_W^{-1})\}_{W \in G(n,k)}$ è un atlante differenziale. Dedurre che $G(n, k)$ è una varietà differenziale di dimensione $n(n - k)$. [Hint: Si fissi una base ortonormale $X_1, \ldots X_k$ di W_0 e una base ortonormale $Y_1, \ldots Y_k$ di W_1 e siano A_0 e A_1 le corrispondenti matrici. Si osservi che $\sigma_{W_0}(\psi) = [X_1 + \psi(X_1), X_2 + \psi(X_2) + \ldots X_k + \psi(X_k)] = [A_{\psi}]$ dove la mappa $Hom(W_0, W_0^{\perp}) \to M(n, k)$, $\psi \mapsto A_{\psi}$ è lineare e dunque liscia. Si osservi che dal punto (7) si ha che $\sigma_{W_1}^{-1} \sigma_{W_0}(\psi) = \phi$ dove $\phi(v) = A_{\psi}(A_1^T A_{\psi})^{-1} A_1^T v - v$....]