Foglio di esercizi di Istituzioni di Geometria

11 ottobre 2017

Esercizio 1 Sia M varietà differenziabile, $p \in M$ e si consideri un funzionale lineare $D : \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tale che $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f)$.

1. Si dimostri che se f è nulla in un intorno di p allora $D(f) = 0$.
2. Si deduca che se il germe di f è uguale al germe di g allora $D(f) = D(g)$.
3. Si mostri che esiste una derivazione nel punto, $v \in T_pM$ tale che $D(f) = v([f])$.

Esercizio 2 Sia $\mathrm{C}^\infty_p(M)$ lo spazio dei germi di funzioni lisce intorno ad un punto p di una varietà differenziabile M. Denotiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme dei germi $[f]$ tali che $f(p) = 0$.

1. Si dimostri che $\mathcal{M}$ è un ideale di $\mathrm{C}^\infty_p(M)$ e che il suo complementare è costituito dagli invertibili dell'algebra $\mathrm{C}^\infty_p(M)$.
2. Si deduca che $\mathcal{M}$ è l'unico ideale massimale di $\mathcal{M}$ e si calcoli il quoziente $\mathrm{C}^\infty_p(M)/\mathcal{M}$.
3. Sia $v \in T_pM$, si mostri che $v([f]) = 0$ per ogni $[f] \in \mathcal{M}^2$. Si deduca che T_pM è il duale dello spazio vettoriale $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$.
4. Mostrare che $\mathrm{C}^\infty_p(M)/\mathcal{M}^k$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita.
5. Mostrare che $\bigcap_k \mathcal{M}^k$ è un ideale non nullo.

Esercizio 3 Sia $\mathrm{C}^0_p(M)$ lo spazio dei germi delle funzioni continue intorno ad un punto p di una varietà topologica M. Sia $\mathcal{M}_0$ l'insieme dei germi che si annullano in p.

1. Si mostri che $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0^2$.
2. Si mostri che se $D : \mathrm{C}^0_p(M) \to \mathbb{R}$ è una derivazione nel punto allora $D = 0$.

Esercizio 4 Sia $\mathrm{SU}(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) | \bar{A}^T A = Id\}$.

1. Si mostri che $\mathrm{SU}(2)$ è una sottovarietà regolare compatta di $M(2, \mathbb{C})$ di dimensione 3.
2. Si consideri la mappa $f : \mathrm{SU}(2) \to S^3$ la mappa definita da $f(A) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Si mostri che tale mappa è un diffeomorfismo.

Esercizio 5 Sia X sottovarietà Y e Y sottovarietà di Z. Mostrare che X è sottovarietà di Z.

Esercizio 6 Siano X, Y due sottovarietà di M. Diciamo che X e Y si intersecano in modo trasverso se per ogni $x \in X \cap Y$ si ha che $T_xX + T_xY = T_xM$.

Si dimostri che se X e Y si intersecano in modo trasverso allora $X \cap Y$ è una sottovarietà di M di dimensione $\dim X + \dim Y - \dim M$.

[Suggerimento: sia $i : X \to M$ l'inclusione. Osservare che la condizione equivale al fatto che Y è trasversa alla mappa i.]

Esercizio 7 Sia $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sia X sottovarietà di K^{n+1} di dimensione k tale che se $x \in X$ allora $\mathrm{Span}_K(x) \subset X$. Mostrare che la proiezionedi X nello spazio proiettivo è una sottovarietà di dimensione $k-1$ nel caso reale e $k-2$ nel caso complesso.

[Suggerimento: sia $x \in X$ e P un K-iperpiano affine passante per x non contenente 0. Dato che $\pi : P \to KP^n$ è una carta locale è sufficiente mostrare che $P \cap X$ è una sottovarietà di K^{n+1}. Ma per questo basta mostrare che l'intersezione è trasversa, vedi l'esercizio precedente]

Esercizio 8 Sia $V = \mathbb{C}^{n+1}$. Osserviamo che possiamo considerare V sia come spazio vettoriale reale sia come spazio vettoriale complesso. Denotiamo con $P_{\mathbb{R}}(V) \cong \mathbb{R}P^{2n+1}$ lo spazio proiettivo reale associato a V e con $P_{\mathbb{C}}(V) = \mathbb{C}P^n$ il proiettivo complesso.

1. Si dimostri che la mappa naturale $P_{\mathbb{R}}(V) \to P_{\mathbb{C}}(V)$ definita da $[x_0 : y_0 : x_1 : y_1 : \ldots : x_n : y_n] \to [x_0 + iy_0 : x_1 + iy_1 : \ldots : x_n + iy_n]$ è una sommersione liscia.

2. Si dimostri che la fibra su un punto è diffeomorfa a S^1.

Esercizio 9

1. Sia $f : M \to N$ un locale diffeomorfismo proprio con N connesso per archi. Mostrare che f è un rivestimento a finiti fogli.

2. Sia $f : M \to N$ un locale diffeomorfismo che goda della proprietà dei sollevamenti dei cammini. Ovvero per ogni cammino continuo $\alpha[0,1]]I \to N$ e per ogni $\tilde{x} \in f^{-1}(\alpha(0))$ esiste un cammino $\hat{\alpha} : I \to M$ tale che $\alpha = f \circ \hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}(0) = \tilde{x}$. Mostrare che per ogni mappa continua $A : [0,1] \times [0,1] \to N$ e per ogni $\tilde{x} \in f^{-1}(A(0,0))$ esiste una mappa continua $\hat{A} : [0,1] \times [0,1] \to M$ tale che $A = f \circ \hat{A}$.

   [Suggerimento: definire $\hat{A}$ prima su $[0,1] \times \{0\}$ e poi estendere sulle linee verticali. Per verificare continuità mostrare che l'insieme dei a tali che $\hat{A}$ è continua su $[0,1] \times [0,s]$ è non vuoto, aperto e chiuso]

3. Nelle ipotesi del punto precedente erificare che il sollevamento di curve chiuse omotopicamente banali è una curva chiusa e dedurre che f è un rivestimento.

Esercizio 10 Sia M varietà differenziabile e N sottovarietà di M. Si consideri la mappa di restrizione $\mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(N)$, $f \mapsto f|_N$. Si dimostri che tale mappa è suriettiva.

Esercizio 11 Si consideri sullo spazio delle matrici $M(2,\mathbb{C})$ il prodotto scalare $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\Re\,\mathrm{tr}(\bar{A}^T B)$ e sia V il sottospazio reale delle matrici anti-hermitiane a traccia nulla, ovvero delle matrici X tali che $\bar{X}^T + X = 0$, $\mathrm{tr}\,X = 0$.

1. Si mostri che le tre matrici $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ e $E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ costituiscono una base $\mathcal{B}$ ortonormale di V.

2. Per ogni $A \in SU(2)$ si mostri che V è un sottospazio invariante per l'endomorfismo di $M(2,\mathbb{C})$ definito da $\gamma_A(X) = A^{-1}XA$.

3. Si mostri che $\langle \gamma_A(X), \gamma_A(X) \rangle = \langle X, X \rangle$ per ogni matrice anti-hermitiana X. Si deduca che la matrice 3×3, $\Gamma(A) = [(\gamma_A)|_V]_{\mathcal{B}}$ appartiene a $O(3,\mathbb{R})$.

4. Si consideri la mappa $\Gamma : \mathrm{SU}(2) \to O(3,\mathbb{R})$ definita da $A \mapsto \Gamma(A)$. Si mostri che è un omomorfismo di gruppi ed è una mappa liscia tra varietà.

5. Si osservi che $\Gamma(SU(2)) \subset SO(3,\mathbb{R})$

6. Si mostri che Γ realizza un rivestimento a due fogli tra $SU(2)$ è $SO(3)$.

   [Suggerimento: per esercizio 9, punto 1, è sufficiente mostrare che Γ è locale diffeomorfismo e calcolare la fibra sopra l'identità. Per mostrare che è un locale diffeomorfismo utilizzando il fatto che Γ è omomorfismo ci si riduca a fare il controllo nell'identità.]

Esercizio 12 Sia $f : M \to N$ mappa differenziabile tra varietà.

1. Dimostrare che la mappa indotta $df : TM \to TN$ definita da $df(x,v) = (f(x), df_x(v))$ è una mappa differenziabile.

2. Se f è un'immersione/sommersione dimostrare che df è anch'essa un'immersione/sommersione.

Esercizio 13 Sia $p : E \to N$ una sommersione tra varietà differenziabili. Assumiamo $\dim N = n$ e $\dim E = n + e$. Sia $f : M \to N$ mappa differenziabile, con $\dim M = m$. Consideriamo il sottoinsieme di $M \times E$

$$E_f = \{(m,e) \in M \times E | f(m) = p(e)\}$$

e la mappa $p_f : E_f \to M$ definita da $p_f(m,e) = m$.

1. Dimostrare che E_f è una sottovarietà di $M \times E$ di dimensione $m + e$. [Suggerimento: si consideri la mappa $F : M \times E \to N \times N$ definita da $(m,e) \mapsto (f(m), p(e))$. E_f è la controimmagine della diagonale in $N \times N$ dunque basta dimostrare che la diagonale è trasversa a F].

2. Dimostrare che la proiezione $p_f : E_f \to M$ è una sommersione e che $p_f^{-1}(m)$ è diffeomorfa a $p^{-1}(f(m))$ in modo naturale.

Esercizio 14 Sia $f : E \to N$ una sommersione e si consideri una mappa $g : M \to E$. Dimostrare che $f \circ g : M \to N$ è una sommersione se e solo se g è trasversa alle fibre di f.

Esercizio 15 Sia M una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$. Per l'esercizio 9 identifichiamo TM con una sottovarietà di $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

1. Si dimostri che per ogni $u, v \in T_xM$ il vettore $(0, v)$ appartiene a $T_{(x,u)}TM$.

2. Supponiamo che M sia una superficie in $\mathbb{R}^3$ sia $x \in M$ e $u \in T_xM$ e N il vettore normale in x. Si dimostri che

$$T_{(x,u)}M = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 | \langle v_2, N\rangle = 0 \text{ e } II_x(v_1, u) = \langle v_2, N\rangle\}$$

dove II è la seconda forma fondamentale di M calcolata rispetto alla normale N.

[Suggerimento: si fissi una parametrizzazione $\sigma : \Omega \to M$ una parametrizzazione locale di un aperto U di M. e si consideri la parametrizzazione $\Sigma : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to TM|_U$ definita da $\Sigma(u, v, x, y) = (\sigma(u, v), x\sigma_u(u, v) + y\sigma_v(u, v))$]

3. Si mostri in un esempio che in generale se $u, v \in T_xM$ il vettore $(v, 0)$ non appartiene a $T_{(x,u)}TM$.

4. Si verifichi che $T_{(x,0)} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{2n} | v_i \in T_xM\}$.

Esercizio 16 Sia M una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo TM come sottoinsieme di $\mathbb{R}^{2n}$.

1. Dimostrare che l'unico valore critico della restrizione funzione $f(x, y) = ||y||^2$ su TM è 0. [Suggerimento: perl'esercizio 14 precedente è sufficiente verificare che $f^{-1}(a)$ è trasverso a TM]

   Si denoti con $T^1M = \{(x, v) | ||v|| = 1\}$ e si osservi che è una sottovarietà di TM di dimensione $2n - 1$.

2. Sia S_0 il luogo di TM che corrisponde alla sezione nulla, ovvero formato dai punti $(x, 0)$ al variare di $x \in M$. Si dimostri che la mappa $TM \setminus S_0 \to T^1M$ definita da $(x, v) \to (x, \frac{v}{||v||})$ è una sommersione.

3. Si mostri che $TM \setminus S_0$ è diffeomorfo a $T^1M \times \mathbb{R}_+$.

Esercizio 17

1. Si mostri che $T^1(S^2) = \{(x, y) \in S^2 \times S^2 | \langle x, y\rangle = 0\}$.

2. Sia $X = \{(x, y) \in S^2 \times S^2 | x = \pm y\}$.

3. Si consideri la mappa $r : S^2 \times S^2 \setminus X \to T^1(S^2)$ definita da $r(x, y) = (x, \frac{1}{\sqrt{1-\langle x,y\rangle^2}}(y - \langle x, y\rangle x))$. Si mostri che r è una ben definita sommersione tale che la fibra su (x, y) è il semicerchio massimo da x a $-x$ passante per y. [Suggerimento: si osservi che r è definita ortonormalizzando la coppia di vettori x, y]

4. Si mostri che r è una retrazione per deformazione.

Esercizio 18

1. Sia $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ la proiezione canonica. Mostrare che Π è una sommersione.

2. Sia π la restrizione di Π alla sfera S^{2n-1} (che immaginiamo come un sottoinsieme di $\mathbb{C}^{n+1}$). Si dimostri che π è un locale diffeomorfismo [suggerimento: è sufficiente mostrare che S^n è trasversa alle fibre di Π]

Esercizio 19 Identifichiamo S^3 con il sottoinsieme di $\mathbb{C}^2$ formato dai punti (z_0, z_1) tali che $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$. Sia $\pi : S^3 \to S^2$ la proiezione di Hopf.

1. Si mostri che π è una sommersione.
2. Sia $\hat{z}$ un punto in S^3 e $v \in T_{\hat{z}}S^3$. Si mostri che $e^{it}v \in T_{e^{it}\hat{z}}S^3$ e che $d\pi_{e^{it}\hat{z}}(e^{it}v) = d\pi_{\hat{z}}(v)$ [Suggerimento: differenziare in $\hat{z}$ l'identità $\pi(e^{it}z) = \pi(z)$]
3. Per ogni $z = (z_0, z_1) \in S^3$ si consideri il vettore $X(z_0, z_1) = (\bar{z}_1, -\bar{z}_0)$. Si mostri che $X(z_0, z_1)$ è un generatore della retta complessa $\ell(z)$ ortogonale alla retta complessa generata da z. Si osservi che $\ell(z)$ è un sottospazio di T_zS^3 e che $\ell(e^{it}z) = \ell(z)$.
4. Si dimostri che la restrizione di $d\pi_z$ alla retta $\ell(z)$ è un isomorfismo tra $\ell(z)$ e $T_{\pi(z)}S^2$.
5. Si consideri la mappa $\sigma : S^3 \to TS^2$ definita da $\sigma(z) = (\pi(z), d\pi_z(X(z)))$. Si dimostri che σ è un'immersione che non tocca mai la sezione nulla.
6. Posto $\sigma(z) = (x, v)$ si dimostri che σ è trasversa alla retta $\{(x, tv) | t \in \mathbb{R}\}$ e si deduca che la mappa $\bar{\sigma} : S^3 \to T^1S^2$ definita da $\sigma(z) = \left(\pi(z), \frac{d\pi_z(X(z))}{||d\pi_z(X(z))||}\right)$ è un locale diffeomorfismo e dunque un rivestimento.
7. Si mostri che le fibre di $\bar{\sigma}$ sono costituite da punti antipodali. [Suggerimento: Si osservi prima di tutto che $\bar{\sigma}(z) = \bar{\sigma}(z')$ implica che $z' = e^{it}z$ per qualche $t \in [0, 2\pi)$. Ora dalla formula mostrata al punto 2. Da questa si deduce che $\sigma(e^{it}z) = (\pi(z), d\pi_z(e^{-2it}X(z))$ e dal punto 4 si conclude...]

Esercizio 20 Sia $G(n, k)$ la Grasmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$. Si dmostri che la mappa

$$D : G(n, k) \to G(n, n - k)$$

definita da $D(V) = V^{\perp}$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 21[La varietà delle bandiere] Si fissi n e si denoti con $G(n, k)$ la Grasmanniana dei k piani in $\mathbb{R}^n$. Si consideri in $G(n, 1) \times G(n, 2) \times \ldots \times G(n, n-1)$ il sottoinsieme

$$\mathcal{F} = \{(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}) | V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1}\}$$

1. Si consideri la mappa $\sigma : O(n) \to G(n, 1) \times G(n, 2) \times \ldots \times G(n, n-1)$ data da $\sigma(A) = (\mathrm{Span}(A_1), \mathrm{Span}(A_1, A_2), \mathrm{Span}(A_1, A_2, A_3), \ldots, \mathrm{Span}(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}))$. Si dimostri che un'immersione e che l'immagine è $\mathcal{F}$.
2. Si dimostri che la mappa $\sigma : O(n) \to \mathcal{F}$ è un rivestimento a 2^n fogli.
3. Si dimostri che $\mathcal{F}$ è una sottovarietà di $G(n, 1) \times G(n, 2) \times \ldots \times G(n, n-1)$ di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.