GEOMETRIA B

Primo scritto a.a. 08/09: 29 gennaio 2009

Esercizio 1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientabile, con mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $\sigma\colon I \to S$ una curva $\mathcal{C}^\infty$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, che sia una linea di curvatura per S. Dato $\varepsilon \neq 0$ sia $\gamma_\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\gamma_\varepsilon(s) = \sigma(s) + \varepsilon N(\sigma(s)) \wedge \sigma'(s).$$

1) Mostra che se σ è una geodetica di S, allora γ_ε è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

2) Mostra che l'aperto massimale di I su cui γ_ε è regolare è

$$J = \left\{ s \in I \mid \kappa_g(s) \neq \frac{1}{\varepsilon} \right\},$$

dove κ_g è la curvatura geodetica di σ.

3) Calcola la curvatura di γ_ε su J, in funzione di κ_g e della curvatura di σ.

Esercizio 2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e orientabile, con curvatura media H e curvatura gaussiana K. Mostra che vale sempre

$$H^2 \geq K.$$

In quali punti si ha l'uguaglianza?

Esercizio 3. Siano $p, q \in \mathbb{R}^2$ due punti distinti e consideriamo lo spazio topologico $X = \mathbb{R}^2/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ definita da:

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \text{ oppure } \{x, y\} = \{p, q\}.$$

Mostra che X è connesso per archi e determina il suo gruppo fondamentale. (*Suggerimento:* costruisci una retrazione da $\mathbb{R}^2$ sul segmento $\overline{pq}$.)