Programma di Algebra Superiore

A. A. 2014/2015

Docenti: Alberto Canonaco e Ludovico Pernazza

Richiami della teoria degli anelli (commutativi): unità, divisori dello zero, idempotenti, nilpotenti, domini di integrità e campi, ideali, omomorfismi e teoremi di omomorfismo e di isomorfismo, operazioni sugli ideali, domini a ideali principali, domini a fattorizzazione unica, prodotto diretto di anelli. Teorema cinese del resto per anelli, radicale di un ideale, nilradicale, radicale di Jacobson. Estensione e contrazione di ideali.

Moduli su un anello: definizione ed esempi. Sottomoduli, omomorfismi di moduli e moduli quoziente; operazioni sui sottomoduli. Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo per moduli. Generatori di un modulo, moduli finitamente generati e moduli ciclici. Annullatore di un modulo e moduli fedeli. Prodotto e somma diretta di moduli e loro proprietà universali; moduli liberi; ogni modulo è quoziente di un modulo libero. Lemma di Nakayama. Successioni esatte di moduli. Modulo degli omomorfismi tra due moduli e sua esattezza a sinistra. Algebre su un anello e restrizione degli scalari; algebre finite e finitamente generate. Prodotto tensoriale di moduli, sua esistenza e unicità a meno di isomorfismo; commutatività e associatività (a meno di isomorfismo) del prodotto tensoriale. Esattezza a destra del prodotto tensoriale. Se A è un anello, I un ideale di A e M un A-modulo, $A/I \otimes_A M$ è isomorfo a M/IM. Estensione degli scalari.

Localizzazione di anelli e di moduli rispetto a un insieme moltiplicativo: proprietà universale, ideali (in particolare primi) di un anello localizzato, localizzazione e operazioni di ideali, esattezza della localizzazione. Proprietà locali. Cenni sulla decomposizione primaria.

Moduli artiniani e moduli noetheriani; se M è un modulo e N un suo sottomodulo, M è artiniano (noetheriano) se e solo se N e M/N sono artiniani (noetheriani). Anelli artiniani e anelli noetheriani; se A è un anello artiniano (noetheriano), lo sono anche ogni A-modulo finitamente generato, ogni A-algebra finita e ogni localizzazione di A. Moduli semplici; serie di composizione di un modulo; un modulo ha una serie di composizione se e solo se è artiniano e noetheriano; teorema di Jordan-Hölder (per i moduli); lunghezza di un modulo artiniano e noetheriano. Un modulo è noetheriano se e solo se ogni suo sottomodulo è finitamente generato. Teorema della base di Hilbert; ogni algebra finitamente generata su un anello noetheriano è noetheriana. In un anello artiniano o noetheriano il nilradicale è nilpotente ed è intersezione finita di ideali primi; un anello artiniano ha un numero finito di ideali massimali. Se in un anello A si può ottenere l'ideale nullo come prodotto finito di ideali massimali, un A-modulo è artiniano se e solo se è noetheriano. Dimensione (di Krull) di un anello; un anello è artiniano se e solo se è noetheriano e ha dimensione 0; su un anello artiniano un modulo è artiniano se e solo se è noetheriano se e solo se è finitamente generato. Versione algebrica del teorema degli zeri di Hilbert: un'estensione di campi finitamente generata come algebra è finita.

Estensioni intere di anelli. Condizioni equivalenti perché un'estensione sia intera. Estensioni intere e proprietà della torre. Chiusura integrale; la chiusura integrale è integralmente chiusa. Domini integralmente chiusi; essere integralmente chiuso è una proprietà locale. Un dominio a fattorizzazione unica è integralmente chiuso. Un'estensione intera passa al quoziente e al localizzato. Teorema del Going-up. Teorema del Going-down (solo enunciato).

Valutazioni di un campo, anelli di valutazione. La chiusura integrale di un dominio è l'intersezione degli anelli di valutazione del suo campo dei quozienti. Valutazioni discrete, anelli di valutazione discreta. Un dominio è di valutazione discreta se e solo se è locale, noetheriano, di dimensione 1 e integralmente chiuso. Domini di Dedekind. Un dominio è di Dedekind se e solo se è noetheriano di dimensione 1 e ogni suo localizzato rispetto a un ideale massimale è un dominio di valutazione discreta. Ogni localizzazione di un dominio di Dedekind è di Dedekind.

Ideali frazionari di un dominio; gli ideali frazionari di un dominio noetheriano sono i sottomoduli finitamente generati del campo dei quozienti; ideali frazionari principali, invertibili, gruppo degli ideali, gruppo delle classi di ideali. Fattorizzazione unica per ideali e per ideali frazionari in un dominio di Dedekind. Un dominio di Dedekind è a fattorizzazione unica se e solo se è a ideali principali. Un dominio di Dedekind con un numero finito di ideali massimali è a ideali principali. La chiusura integrale di un dominio di Dedekind in un'estensione finita del suo campo delle frazioni è un dominio di Dedekind (dimostrazione nel caso separabile).

Traccia e norma di un elemento in un'estensione finita di campi $K \subseteq L$ e loro proprietà; espressione di traccia e norma in termini delle radici del polinomio minimo e in termini delle immersioni di L su K quando $K \subseteq L$ è separabile. Transitività della traccia e transitività della norma per estensioni separabili. La forma K-bilineare simmetrica indotta dalla traccia è non degenere se e solo se $K \subseteq L$ è separabile. Discriminante di una K-base di L; come cambia il discriminante cambiando base. Se A è un dominio di Dedekind con campo delle frazioni K e B la sua chiusura integrale in L (libero di rango $[L : K]$ come A-modulo se A a ideali principali), esistono K-basi di L contenute in B; ideale discriminante di B su A e sue proprietà. Norma di un ideale di B come ideale di A; moltiplicatività della norma di ideali; norma di un ideale massimale.

Primi $\mathfrak{p}_i$ in B sopra a un primo $\mathfrak{p}$ di A; ramificazione, indici di ramificazione e_i e grado relativo f_i e proprietà della torre. $\sum e_i f_i \leq [L : K]$, con uguaglianza se $B_\mathfrak{p}$ è finitamente generato come $A_\mathfrak{p}$-modulo. Caso di estensioni finite e separabili, caso di estensioni di Galois. I primi che ramificano sono quelli che contengono il discriminante. Teorema di Kummer.

Reticoli, cella fondamentale, volume; un sottogruppo di $\mathbb{R}^n$ è un reticolo se e solo se interseca ogni compatto in al più un numero finito di elementi; teorema di Minkowski.

Campi di numeri e anello degli interi algebrici $\mathcal{O}_K$ di un campo di numeri K; $\mathcal{O}_K$ è un dominio di Dedekind; descrizione esplicita di $\mathcal{O}_K$ quando $[K : \mathbb{Q}] = 2$. Norma numerica di un ideale di $\mathcal{O}_K$; la norma numerica di $I \neq 0$ coincide con la cardinalità di $\mathcal{O}_K/I$. Bound di Minkowski; teorema di finitezza del gruppo delle classi di $\mathcal{O}_K$; se $K \neq \mathbb{Q}$, almeno un primo di $\mathbb{Z}$ ramifica in $\mathcal{O}_K$. Teorema delle unità: il gruppo delle unità di $\mathcal{O}_K$ è costituito dagli elementi di $\mathcal{O}_K$ di norma ± 1 ed è isomorfo al prodotto del gruppo (ciclico finito) delle radici dell'unità in K per un gruppo abeliano libero di rango $r + s - 1$, con r numero di immersioni di K in $\mathbb{R}$ e $2s$ numero di immersioni di K in $\mathbb{C}$ la cui immagine non è contenuta in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione del "primo caso" dell'ultimo teorema di Fermat: non ci sono soluzioni intere positive di $x^p + y^p = z^p$ se p è un primo regolare che non divide xyz.