Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 10-03-2020

Contenuto del corso

Il corso rappresenta la naturale prosecuzione di *Algebra 1*.

I principali argomenti trattati saranno:

- moduli su un anello;
- complementi di teoria dei gruppi;
- estensioni di campi (teoria di Galois).

Contenuto del corso

Il corso rappresenta la naturale prosecuzione di *Algebra 1*.

I principali argomenti trattati saranno:

- moduli su un anello;
- complementi di teoria dei gruppi;
- estensioni di campi (teoria di Galois).

Il testo di riferimento per la prima parte sui moduli sono le dispense disponibili al seguente indirizzo:
`http://www-dimat.unipv.it/canonaco/Moduli.pdf`
Nella lezione odierna tratteremo il contenuto della Sezione 1.

Omomorfismi tra due gruppi abeliani

Dati due gruppi abeliani $(G,+)$ e $(G',+)$, l'insieme

$$\mathrm{Hom}(G,G') := \{f\colon G \to G' \,:\, f \text{ è un omomorfismo}\}$$

è un sottogruppo di ${G'}^G := \{f\colon G \to G'\}$, e dunque, in particolare, è un gruppo.

Omomorfismi tra due gruppi abeliani

Dati due gruppi abeliani $(G, +)$ e $(G', +)$, l'insieme

$$\mathrm{Hom}(G, G') := \{f : G \to G' \ : \ f \text{ è un omomorfismo}\}$$

è un sottogruppo di ${G'}^G := \{f : G \to G'\}$, e dunque, in particolare, è un gruppo.

Ricordiamo che, per ogni insieme X, l'insieme ${G'}^X$ è un gruppo (abeliano perché G' lo è) con l'operazione definita da

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$$

per ogni $f_1, f_2 \in {G'}^X$ e per ogni $x \in X$.

Dimostrazione

Dimostriamo che $f_1 + f_2 \in \mathrm{Hom}(G, G')$ $\forall\, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(G, G')$, lasciando le altre verifiche per esercizio.

$\forall\, a, b \in G$ si ha (usando il fatto che f_1 e f_2 sono omomorfismi e che l'operazione in G' è commutativa)

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(a+b) &= f_1(a+b)+f_2(a+b) = f_1(a)+f_1(b)+f_2(a)+f_2(b)\\ &= f_1(a)+f_2(a)+f_1(b)+f_2(b) = (f_1+f_2)(a)+(f_1+f_2)(b),\end{aligned}$$

il che dimostra che $f_1 + f_2$ è un omomorfismo.

Osservazione 1.3

Dato un A-modulo M, per ogni $a, b \in A$ e per ogni $x, y \in M$ si ha (definendo $\alpha(a)(x) := ax$):

1. $\alpha(a)(x+y) = a(x+y) = ax + ay = \alpha(a)(x) + \alpha(a)(y)$, il che dimostra che $\alpha(a)\colon M \to M$ è un omomorfismo di gruppi, cioè $\alpha(a) \in \mathrm{End}(M)$;
2. $\alpha(a+b)(x) = (a+b)x = ax + bx = \alpha(a)(x) + \alpha(b)(x) = (\alpha(a) + \alpha(b))(x)$,
   per cui $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$;
3. $\alpha(ab)(x) = (ab)x = a(bx) = \alpha(a)(bx) = \alpha(a)(\alpha(b)(x)) = (\alpha(a) \circ \alpha(b))(x)$,
   per cui $\alpha(ab) = \alpha(a) \circ \alpha(b)$;
4. $\alpha(1_A)(x) = 1_A x = x = \mathrm{id}_M(x)$,
   per cui $\alpha(1_A) = \mathrm{id}_M = 1_{\mathrm{End}(M)}$.