Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 13-03-2020
(Sezioni 3 e 4 delle dispense)

Definizione-Proposizione 3.13 (prima parte)

$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Hom}(M, N)$:

- $\mathrm{Hom}_A(M, N) \neq \emptyset$ (esercizio);
- $f - g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)\ \forall\, f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, dato che $\forall\, a \in A$ e $\forall\, x \in M$ $(f - g)(ax) = f(ax) - g(ax) = af(x) - ag(x) = a(f(x) - g(x)) = a(f - g)(x)$.

Definizione-Proposizione 3.13 (prima parte)

$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Hom}(M, N)$:

- $\mathrm{Hom}_A(M, N) \neq \emptyset$ (esercizio);
- $f - g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ $\forall\, f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, dato che $\forall\, a \in A$ e $\forall\, x \in M$ $(f - g)(ax) = f(ax) - g(ax) = af(x) - ag(x) = a(f(x) - g(x)) = a(f - g)(x)$.

$\mathrm{End}_A(M)$ è un sottoanello di $\mathrm{End}(M)$ (esercizio).

Definizione-Proposizione 3.13 (prima parte)

$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Hom}(M, N)$:

- $\mathrm{Hom}_A(M, N) \neq \emptyset$ (esercizio);
- $f - g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ $\forall\, f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, dato che $\forall\, a \in A$ e $\forall\, x \in M$ $(f - g)(ax) = f(ax) - g(ax) = af(x) - ag(x) = a(f(x) - g(x)) = a(f - g)(x)$.

$\mathrm{End}_A(M)$ è un sottoanello di $\mathrm{End}(M)$ (esercizio).

Se A è commutativo, dati $a \in A$ e $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, la funzione $af\colon M \to N$ è A-lineare perché $\forall\, x, y \in M$ e $\forall\, b \in A$

- $(af)(x + y) = af(x + y) = a(f(x) + f(y)) = af(x) + af(y) = (af)(x) + (af)(y)$;
- $(af)(bx) = af(bx) = a(bf(x)) = (ab)f(x) = (ba)f(x) = b(af(x)) = b(af)(x)$.

Definizione-Proposizione 3.13 (seconda parte)

Se A è commutativo, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ è un A-modulo, visto che è un gruppo abeliano e $\forall\, a, b \in A$ e $\forall\, f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ si ha:

- $a(f + g) = af + ag$ perché $\forall\, x \in M$
  $(a(f+g))(x) = a(f+g)(x) = a(f(x)+g(x)) =$
  $af(x) + ag(x) = (af)(x) + (ag)(x) = (af + ag)(x)$;
- $(a + b)f = af + bf$ (esercizio);
- $(ab)f = a(bf)$ perché $\forall\, x \in M$
  $((ab)f)(x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = a(bf)(x) = (a(bf))(x)$;
- $1f = f$ (esercizio).

Proposizione 4.1

La moltiplicazione per scalari è ben definita perché
se $x, y \in M$ sono tali che $\bar{x} := x + M' = \bar{y}$ (cioè $x - y \in M'$), allora $\overline{ax} = \overline{ay}$ $\forall\, a \in A$, dato che $ax - ay = a(x - y) \in M'$.

Proposizione 4.1

La moltiplicazione per scalari è ben definita perché
se $x, y \in M$ sono tali che $\bar{x} := x + M' = \bar{y}$ (cioè $x - y \in M'$),
allora $\overline{ax} = \overline{ay}\ \forall\, a \in A$, dato che $ax - ay = a(x - y) \in M'$.

M/M' è un A-modulo perché $\forall\, a, b \in A$ e $\forall\, x, y \in M$

- $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\overline{x + y} = \overline{a(x + y)} = \overline{ax + ay} = \overline{ax} + \overline{ay} = a\bar{x} + a\bar{y}$;
- $(a + b)\bar{x} = \overline{(a + b)x} = \overline{ax + bx} = \overline{ax} + \overline{bx} = a\bar{x} + b\bar{x}$;
- $(ab)\bar{x} = \overline{(ab)x} = \overline{a(bx)} = a\overline{bx} = a(b\bar{x})$;
- $1\bar{x} = \overline{1x} = \bar{x}$.

Proposizione 4.1

La moltiplicazione per scalari è ben definita perché
se $x, y \in M$ sono tali che $\bar{x} := x + M' = \bar{y}$ (cioè $x - y \in M'$),
allora $\overline{ax} = \overline{ay}\ \forall\, a \in A$, dato che $ax - ay = a(x - y) \in M'$.

M/M' è un A-modulo perché $\forall\, a, b \in A$ e $\forall\, x, y \in M$

- $a(\bar{x}+\bar{y}) = a\overline{x+y} = \overline{a(x+y)} = \overline{ax+ay} = \overline{ax}+\overline{ay} = a\bar{x}+a\bar{y}$;
- $(a+b)\bar{x} = \overline{(a+b)x} = \overline{ax+bx} = \overline{ax} + \overline{bx} = a\bar{x} + b\bar{x}$;
- $(ab)\bar{x} = \overline{(ab)x} = \overline{a(bx)} = a\overline{bx} = a(b\bar{x})$;
- $1\bar{x} = \overline{1x} = \bar{x}$.

Infine è già noto che π è un omomorfismo suriettivo di gruppi con $\ker(\pi) = M'$, e resta da notare che $\forall\, a \in A$ e $\forall\, x \in M$

$$\pi(ax) = \overline{ax} = a\bar{x} = a\pi(x).$$

Proposizione 4.5

Sia $\pi\colon M \to M/M'$ la proiezione al quoziente. La funzione

$$\begin{aligned} \{\text{sottomoduli di } M \text{ contenenti } M'\} &\to \{\text{sottomoduli di } M/M'\} \\ M'' &\mapsto M''/M' = \pi(M'') \end{aligned}$$

è biunivoca con inversa la funzione

$$\begin{aligned} \{\text{sottomoduli di } M/M'\} &\to \{\text{sottomoduli di } M \text{ contenenti } M'\} \\ N &\mapsto \pi^{-1}(N). \end{aligned}$$

In effetti l'analogo risultato è già noto con "sottogruppi" al posto di "sottomoduli", e per concludere basta usare il fatto che immagine e controimmagine attraverso π (che è un omomorfismo di moduli) di sottomoduli sono sottomoduli.

Teorema di omomorfismo

Con le stesse ipotesi, per il teorema di omomorfismo per gruppi esiste un unico omomorfismo di gruppi $g\colon M/M' \to N$ con tutte le proprietà richieste. Per concludere basta allora osservare che $\forall\, a \in A$ e $\forall\, x \in M$ si ha (tenendo conto che f è A-lineare)

$$g(a\bar{x}) = g(\overline{ax}) = f(ax) = af(x) = ag(\bar{x}).$$

Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo

Teorema di omomorfismo

Con le stesse ipotesi, per il teorema di omomorfismo per gruppi esiste un unico omomorfismo di gruppi $g\colon M/M' \to N$ con tutte le proprietà richieste. Per concludere basta allora osservare che $\forall\, a \in A$ e $\forall\, x \in M$ si ha (tenendo conto che f è A-lineare)

$$g(a\bar{x}) = g(\overline{ax}) = f(ax) = af(x) = ag(\bar{x}).$$

Primo teorema di isomorfismo

Applicando il teorema di omomorfismo con $M' = \ker(f)$ si ottiene un omomorfismo iniettivo (di moduli) $g\colon M/\ker(f) \to N$. Dunque

$$M/\ker(f) \cong \operatorname{im}(g) = \operatorname{im}(f).$$