Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 18-03-2020
(Sezioni 6 e 7 delle dispense)

Proposizione 6.4

$\forall\, y \in L$ esistono unici $a_\lambda \in A$ ($\forall\, \lambda \in \Lambda$) quasi tutti 0 tali che $y = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda y_\lambda$. Dunque se esiste f come richiesto deve essere

$$f(y) = f\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda y_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda f(y_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda.$$

Viceversa, definendo $f(y) := \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda \;\forall\, y \in L$ come sopra, f risulta A-lineare (esercizio).

Proposizione 6.4

$\forall\, y \in L$ esistono unici $a_\lambda \in A$ ($\forall\, \lambda \in \Lambda$) quasi tutti 0 tali che $y = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda y_\lambda$. Dunque se esiste f come richiesto deve essere

$$f(y) = f\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda y_\lambda\Big) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda f(y_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda.$$

Viceversa, definendo $f(y) := \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda \ \forall\, y \in L$ come sopra, f risulta A-lineare (esercizio).

f è suriettiva se e solo se $\langle x_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\rangle_A = M$ perché

$$\mathrm{im}(f) = f(\langle y_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\rangle_A) = \langle f(y_\lambda) \,:\, \lambda \in \Lambda\rangle_A = \langle x_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\rangle_A.$$

Proposizione 6.4

$\forall\, y \in L$ esistono unici $a_\lambda \in A$ ($\forall\, \lambda \in \Lambda$) quasi tutti 0 tali che $y = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda y_\lambda$. Dunque se esiste f come richiesto deve essere

$$f(y) = f\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda y_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda f(y_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda.$$

Viceversa, definendo $f(y) := \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda \;\forall\, y \in L$ come sopra, f risulta A-lineare (esercizio).

f è suriettiva se e solo se $\langle x_\lambda : \lambda \in \Lambda\rangle_A = M$ perché

$$\mathrm{im}(f) = f(\langle y_\lambda : \lambda \in \Lambda\rangle_A) = \langle f(y_\lambda) : \lambda \in \Lambda\rangle_A = \langle x_\lambda : \lambda \in \Lambda\rangle_A.$$

f è iniettiva se e solo se $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ è linearmente indipendente e $x_\lambda \neq x_\mu$ se $\lambda \neq \mu$ perché

$$\ker(f) = \{y \in L : f(y) = 0\} = \{y = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda y_\lambda \in L : \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda = 0\}.$$

Proposizione 6.8

$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ è linearmente indipendente perché,
dati $x_1, \ldots, x_n \in U$ distinti e $a_1, \ldots, a_n \in A$ tali che $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$,
$\forall\, i = 1, \ldots, n$ esiste $\lambda_i \in \Lambda$ tale che $x_i \in U_{\lambda_i}$.
Poiché $\{U_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$ è una catena, esiste $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che

$$U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \subseteq U_{\lambda_j}.$$

Dunque $x_1, \ldots, x_n \in U_{\lambda_j}$ e pertanto $a_1 = \cdots = a_n = 0$ per l'indipendenza lineare di U_{λ_j}.

Osservazione 7.3

Per il teorema di omomorfismo per moduli esiste unico $\overline{g}$ tale che

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & N \arrow[d, "p"] \\ M/IM \arrow[r, dashed, "\overline{g}"'] & N/IN \end{tikzcd}$$

commuta (cioè $p \circ g = \overline{g} \circ q$) perché $IM \subseteq \ker(p \circ g) = g^{-1}(IN)$.

Osservazione 7.3

Per il teorema di omomorfismo per moduli esiste unico $\overline{g}$ tale che

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & N \arrow[d, "p"] \\ M/IM \arrow[r, dashed, "\overline{g}"'] & N/IN \end{tikzcd}$$

commuta (cioè $p \circ g = \overline{g} \circ q$) perché $IM \subseteq \ker(p \circ g) = g^{-1}(IN)$.

g suriettivo $\implies$ $p \circ g$ suriettivo $\implies$ $\overline{g}$ suriettivo.

Osservazione 7.3

Per il teorema di omomorfismo per moduli esiste unico $\bar{g}$ tale che

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & N \arrow[d, "p"] \\ M/IM \arrow[r, dashed, "\bar{g}"'] & N/IN \end{tikzcd}$$

commuta (cioè $p \circ g = \bar{g} \circ q$) perché $IM \subseteq \ker(p \circ g) = g^{-1}(IN)$.

g suriettivo $\implies$ $p \circ g$ suriettivo $\implies$ $\bar{g}$ suriettivo.

g isomorfismo $\implies$ $\bar{g}$ iniettivo (quindi isomorfismo):
$\bar{g}$ iniettivo $\iff$ $IM = \ker(p \circ g) = g^{-1}(IN)$ $\iff$ $g^{-1}(IN) \subseteq IM$;
$x \in g^{-1}(IN)$ (cioè $g(x) \in IN$) $\implies$ esistono $a_1, \dots, a_n \in I$ e $y_1, \dots, y_n \in N$ tali che $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i y_i$;
g suriettivo $\implies$ esiste $x_i \in M$ tale che $y_i = g(x_i)$ $\forall\, i = 1, \dots, n$;
dunque $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i y_i = \sum_{i=1}^n a_i g(x_i) = g(\sum_{i=1}^n a_i x_i)$;
g iniettivo $\implies$ $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in IM$.