Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 27-03-2020
(Sezione 13 delle dispense)

Esercizio

Sia A un dominio noetheriano e siano I e J due ideali non principali di A tali che l'ideale IJ è principale e $I + J = A$.

1. Dimostrare che
$$f : I \oplus J \to A \qquad (a, b) \mapsto a + b$$
è un omomorfismo suriettivo di A-moduli tale che $\ker(f) \cong A$.
2. Dimostrare che esiste un A-modulo noetheriano che ammette decomposizioni essenzialmente diverse come somma diretta finita di indecomponibili.
3. Dimostrare che tutte le ipotesi sono soddisfatte se
$$A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \quad I = (3, 1 + \sqrt{-5}), \quad J = (3, 1 - \sqrt{-5}).$$

Soluzione

1. f è l'omomorfismo indotto (per la proprietà universale della somma diretta) dalle inclusioni di I e J in A.
   f è suriettivo perché $\mathrm{im}(f) = I + J = A$.
   $\ker(f) = \{(a, -a) : a \in I \cap J\} \cong I \cap J$. Per il teorema cinese del resto $I \cap J = IJ$ e $IJ \cong A$ perché IJ è principale e non nullo.

Soluzione

1. f è l'omomorfismo indotto (per la proprietà universale della somma diretta) dalle inclusioni di I e J in A.
   f è suriettivo perché $\operatorname{im}(f) = I + J = A$.
   $\ker(f) = \{(a, -a) : a \in I \cap J\} \cong I \cap J$. Per il teorema cinese del resto $I \cap J = IJ$ e $IJ \cong A$ perché IJ è principale e non nullo.
2. $(I \oplus J)/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f) = A$ è libero, dunque
   $I \oplus J \cong \ker(f) \oplus A \cong A^2$, che è un A-modulo noetheriano perché A lo è; I, J e A sono indecomponibili perché ideali non nulli in un dominio; $I, J \ncong A$ perché I e J non sono principali.

Soluzione

1. f è l'omomorfismo indotto (per la proprietà universale della somma diretta) dalle inclusioni di I e J in A.
   f è suriettivo perché $\mathrm{im}(f) = I + J = A$.
   $\ker(f) = \{(a, -a) \,:\, a \in I \cap J\} \cong I \cap J$. Per il teorema cinese del resto $I \cap J = IJ$ e $IJ \cong A$ perché IJ è principale e non nullo.
2. $(I \oplus J)/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f) = A$ è libero, dunque
   $I \oplus J \cong \ker(f) \oplus A \cong A^2$, che è un A-modulo noetheriano perché A lo è; I, J e A sono indecomponibili perché ideali non nulli in un dominio; $I, J \ncong A$ perché I e J non sono principali.
3. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo finitamente generato, dunque è un anello noetheriano.
   $3, 2 = 1 + \sqrt{-5} + 1 - \sqrt{-5} \in I + J \implies 1 = 3 - 2 \in I + J$.
   $9 = 3 \cdot 3, 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \in IJ \implies 3 = 9 - 6 \in IJ$.
   $IJ = (9, 3(1 + \sqrt{-5}), 3(1 - \sqrt{-5}), 6) \subseteq (3) \implies IJ = (3)$.
   Per assurdo $I = (a + b\sqrt{-5})$ (e quindi $J = (a - b\sqrt{-5})$) $\implies$ $(a^2 + 5b^2) \mid 9, 6 \implies a = \pm 1,\ b = 0 \implies IJ = (1)$, assurdo.