Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 03-04-2020
(Sezione 16 delle dispense)

Esercizio

Sia A un dominio e sia $f\colon M \to N$ un omomorfismo di A-moduli.

1. Dimostrare che $f(\mathrm{T}(M)) \subseteq \mathrm{T}(N)$.
2. Dimostrare che la funzione
$$\bar{f}\colon \overline{M} := M/\mathrm{T}(M) \to \overline{N} := N/\mathrm{T}(N) \quad x+\mathrm{T}(M) \mapsto f(x)+\mathrm{T}(N)$$
è un omomorfismo di A-moduli.
3. Dimostrare che, se f è iniettivo (risp. suriettivo), allora $\bar{f}$ è iniettivo (risp. suriettivo).
4. Dimostrare che, se A è a ideali principali, N (risp. M) è finitamente generato e f è iniettivo (risp. suriettivo), allora $\overline{M}$ e $\overline{N}$ sono liberi di rango finito e $\mathrm{rk}(\overline{M}) \leq \mathrm{rk}(\overline{N})$ (risp. $\mathrm{rk}(\overline{M}) \geq \mathrm{rk}(\overline{N})$).

Soluzione

1. $x \in \mathrm{T}(M) \implies \exists\, 0 \neq a \in A$ tale che $ax = 0 \implies af(x) = f(ax) = f(0) = 0 \implies f(x) \in \mathrm{T}(N)$.

Soluzione

1. $x \in \mathrm{T}(M) \implies \exists\, 0 \neq a \in A$ tale che $ax = 0 \implies af(x) = f(ax) = f(0) = 0 \implies f(x) \in \mathrm{T}(N)$.
2. $\pi \circ f \colon M \to \overline{N}$ (con $\pi \colon N \to \overline{N}$) è un omomorfismo tale che $\ker(\pi \circ f) = f^{-1}(\ker(\pi)) = f^{-1}(\mathrm{T}(N))$. Per il punto precedente $\mathrm{T}(M) \subseteq \ker(\pi \circ f)$, e allora per il teorema di omomorfismo esiste un unico omomorfismo $\bar{f} \colon \overline{M} \to \overline{N}$ tale che $\bar{f}(x + \mathrm{T}(M)) = (\pi \circ f)(x) = f(x) + \mathrm{T}(N)\ \forall x \in M$.

Soluzione

1. $x \in \mathrm{T}(M) \implies \exists\, 0 \neq a \in A$ tale che $ax = 0 \implies af(x) = f(ax) = f(0) = 0 \implies f(x) \in \mathrm{T}(N)$.
2. $\pi \circ f\colon M \to \overline{N}$ (con $\pi\colon N \to \overline{N}$) è un omomorfismo tale che $\ker(\pi \circ f) = f^{-1}(\ker(\pi)) = f^{-1}(\mathrm{T}(N))$. Per il punto precedente $\mathrm{T}(M) \subseteq \ker(\pi \circ f)$, e allora per il teorema di omomorfismo esiste un unico omomorfismo $\bar{f}\colon \overline{M} \to \overline{N}$ tale che $f(x + \mathrm{T}(M)) = (\pi \circ f)(x) = f(x) + \mathrm{T}(N)\ \forall x \in M$.
3. f iniettivo $\implies f^{-1}(\mathrm{T}(N)) \subseteq \mathrm{T}(M)$ (se $x \in f^{-1}(\mathrm{T}(N))$, $\exists\, 0 \neq a \in A$ tale che $0 = af(x) = f(ax)$ e quindi $ax = 0$) $\implies \mathrm{T}(M) = f^{-1}(\mathrm{T}(N)) = \ker(\pi \circ f) \implies \bar{f}$ iniettivo.
   f suriettivo $\implies \pi \circ f$ suriettivo $\implies \bar{f}$ suriettivo.

Soluzione

1. $x \in \mathrm{T}(M) \implies \exists\, 0 \neq a \in A$ tale che $ax = 0 \implies af(x) = f(ax) = f(0) = 0 \implies f(x) \in \mathrm{T}(N)$.
2. $\pi \circ f : M \to \overline{N}$ (con $\pi : N \to \overline{N}$) è un omomorfismo tale che $\ker(\pi \circ f) = f^{-1}(\ker(\pi)) = f^{-1}(\mathrm{T}(N))$. Per il punto precedente $\mathrm{T}(M) \subseteq \ker(\pi \circ f)$, e allora per il teorema di omomorfismo esiste un unico omomorfismo $\bar{f} : \overline{M} \to \overline{N}$ tale che $\bar{f}(x + \mathrm{T}(M)) = (\pi \circ f)(x) = f(x) + \mathrm{T}(N)\ \forall x \in M$.
3. f iniettivo $\implies f^{-1}(\mathrm{T}(N)) \subseteq \mathrm{T}(M)$ (se $x \in f^{-1}(\mathrm{T}(N))$, $\exists\, 0 \neq a \in A$ tale che $0 = af(x) = f(ax)$ e quindi $ax = 0$) $\implies \mathrm{T}(M) = f^{-1}(\mathrm{T}(N)) = \ker(\pi \circ f) \implies \bar{f}$ iniettivo. f suriettivo $\implies \pi \circ f$ suriettivo $\implies \bar{f}$ suriettivo.
4. M (risp. N) è finitamente generato perché isomorfo a un sottomodulo (risp. quoziente) di N (risp. M) che lo è. Dunque $\overline{M}$ e $\overline{N}$ sono liberi di rango finito perché finitamente generati e senza torsione. Allora $\mathrm{rk}(\overline{M}) \leq \mathrm{rk}(\overline{N})$ per il Lemma 13.1 (risp. $\mathrm{rk}(\overline{M}) \geq \mathrm{rk}(\overline{N})$ perché $\overline{M} \cong \ker(\bar{f}) \oplus \overline{N}$).

Sottomoduli di un modulo finitamente generato

Siano A un dominio a ideali principali ma non un campo, M un A-modulo finitamente generato e M' un sottomodulo di M.

- $\mathrm{rk}(M'/\mathrm{T}(M')) \leq \mathrm{rk}(M/\mathrm{T}(M))$
- $\mathrm{T}(M') = \mathrm{T}(M) \cap M'$
- $\mathrm{T}_P(M') = \mathrm{T}_P(M) \cap M' \ \forall\, P \in \mathrm{Max}(A)$

$M = \bigoplus_{P \in \mathrm{Max}(A)} \mathrm{T}_P(M) \bigoplus L$ (dove $L \cong M/\mathrm{T}(M) \cong A^l$) $\implies$ $M' = \bigoplus_{P \in \mathrm{Max}(A)} \mathrm{T}_P(M') \bigoplus L'$ (dove $L' \cong M'/\mathrm{T}(M') \cong A^{l'}$) con $\mathrm{T}_P(M') \subseteq \mathrm{T}_P(M)$ sottomodulo $\forall\, P \in \mathrm{Max}(A)$ e $l' \leq l$.

Viceversa, dato $M'_P \subseteq \mathrm{T}_P(M)$ sottomodulo $\forall\, P \in \mathrm{Max}(A)$ e dato $l' \leq l$, esiste $\bigoplus_{P \in \mathrm{Max}(A)} M'_P \bigoplus L' \subseteq M$ sottomodulo con $L' \cong A^{l'}$.

Esercizio 11

- Se $P = (p) \in \mathrm{Max}(A)$ e $n > 0$, gli A-sottomoduli di A/P^n sono P^i/P^n con $0 \leq i \leq n$ e $P^i/P^n \cong A/P^{n-i}$:
  $P^i/P^n = \langle p^i + P^n \rangle_A \cong A/\mathrm{Ann}_A(p^i + P^n)$ e
  $\mathrm{Ann}_A(p^i + P^n) = (P^n : p^i) = (p^{n-i}) = P^{n-i}$.
- Se $M \cong \bigoplus_{i=1}^k A/P^{n_i}$, dati $n_i' \leq n_i$ (per $i = 1, \dots, k$) esiste un sottomodulo M' di M tale che $M' \cong \bigoplus_{i=1}^k A/P^{n_i'}$:
  si può prendere M' corrispondente al sottomodulo
  $\bigoplus_{i=1}^k P^{n_i - n_i'}/P^{n_i}$ di $\bigoplus_{i=1}^k A/P^{n_i}$.

Esercizio 11

- Se $P = (p) \in \mathrm{Max}(A)$ e $n > 0$, gli A-sottomoduli di A/P^n sono P^i/P^n con $0 \leq i \leq n$ e $P^i/P^n \cong A/P^{n-i}$:
  $P^i/P^n = \langle p^i + P^n \rangle_A \cong A/\mathrm{Ann}_A(p^i + P^n)$ e
  $\mathrm{Ann}_A(p^i + P^n) = (P^n : p^i) = (p^{n-i}) = P^{n-i}$.
- Se $M \cong \bigoplus_{i=1}^k A/P^{n_i}$, dati $n_i' \leq n_i$ (per $i = 1, \ldots, k$) esiste un sottomodulo M' di M tale che $M' \cong \bigoplus_{i=1}^k A/P^{n_i'}$:
  si può prendere M' corrispondente al sottomodulo $\bigoplus_{i=1}^k P^{n_i - n_i'}/P^{n_i}$ di $\bigoplus_{i=1}^k A/P^{n_i}$.
- Se G è un gruppo abeliano tale che $\#G = p^n$ (p primo), $\forall\, n' \leq n$ esiste $G' < G$ tale che $\#G' = p^{n'}$ (esercizio).
- Se G è un gruppo abeliano tale che $\#G = n$, $\forall\, n'$ divisore di n esiste $G' < G$ tale che $\#G' = n'$:
  se $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{n_p}$ e $n' = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{n_p'}$ (con $n_p' \leq n_p$), esiste $G_p' < \mathrm{T}_p(G)$ tale che $\#G_p' = p^{n_p'}$ (dato che $\#\mathrm{T}_p(G) = p^{n_p}$) e si può prendere $G' := \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} G_p'$.

Sottomoduli di P-torsione

Se $M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A/P^{n_i}$ e M' è un sottomodulo di M, esistono $n'_i \leq n_i$ (per $i = 1, \ldots, k$) tali che $M' \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A/P^{n'_i}$.

Sottomoduli di P-torsione

Se $M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A/P^{n_i}$ e M' è un sottomodulo di M, esistono $n'_i \leq n_i$ (per $i = 1, \dots, k$) tali che $M' \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A/P^{n'_i}$.

- Per induzione su $l(M) := \sum_{i=1}^{k} n_i$ (il caso $l(M) = 0$ è ovvio).
- $\mathrm{Ann}(M) = P^m \subseteq \mathrm{Ann}(M') = P^{m'}$ con $m' \leq m = \max\{n_1, \dots, n_k\} = n_1$ (posso supporre).
- Se $m' < m$, $M' \subseteq \tilde{M} := \{x \in M \,:\, P^{m-1} \subseteq \mathrm{Ann}(x)\}$ sottomodulo di M tale che $\tilde{M} \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A/P^{\tilde{n}_i}$ con $\tilde{n}_1 = n_1 - 1$ e $\tilde{n}_i \leq n_i \; \forall\, i = 2, \dots, k$. Dunque $l(\tilde{M}) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{n}_i < n$ e per induzione $M' \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A/P^{n'_i}$ con $n'_i \leq \tilde{n}_i \leq n_i \; \forall\, i = 1, \dots, k$.
- Se $m' = m$, per il Lemma 13.9 esiste $x \in M'$ tale che $\mathrm{Ann}(x) = P^m$ e $\langle x \rangle_A$ è un addendo diretto sia di M che di M'. Se $M = \langle x \rangle_A \oplus N$, risulta $M' = \langle x \rangle_A \oplus N'$ con $N' := N \cap M'$. Per l'unicità del teorema di struttura $N \cong \bigoplus_{i=2}^{k} A/P^{n_i}$, per cui $l(N) = \sum_{i=2}^{k} n_i < l(M)$. Dunque per induzione $N' \cong \bigoplus_{i=2}^{k} A/P^{n'_i}$ con $n'_i \leq n_i \; \forall\, i = 2, \dots, k$, e pertanto $M' \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A/P^{n'_i}$ con $n'_1 = n_1$.

Esercizio 10

(a) $\pi\colon A^2 \to M = A^2/N$, $\pi'\colon M \to \overline{M} := M/\mathrm{T}(M) \implies \pi' \circ \pi\colon A^2 \to \overline{M}$ omomorfismo suriettivo $\implies \overline{M}$ finitamente generato e senza torsione $\implies \overline{M} \cong A^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. $N' := \ker(\pi' \circ \pi)$ tale che $A^2 \cong N = \ker(\pi) \subseteq N' \subseteq A^2 \implies N' \cong A^2$. Per il primo teorema di isomorfismo $A^2/N' \cong \overline{M} \cong A^n$, quindi $A^2 \cong N' \oplus A^n \cong A^{2+n} \implies n = 0$, cioè $M = \mathrm{T}(M)$.

Esercizio 10

(a) $\pi\colon A^2 \to M = A^2/N$, $\pi'\colon M \to \overline{M} := M/\mathrm{T}(M) \implies \pi' \circ \pi\colon A^2 \to \overline{M}$ omomorfismo suriettivo $\implies \overline{M}$ finitamente generato e senza torsione $\implies \overline{M} \cong A^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. $N' := \ker(\pi' \circ \pi)$ tale che $A^2 \cong N = \ker(\pi) \subseteq N' \subseteq A^2 \implies N' \cong A^2$. Per il primo teorema di isomorfismo $A^2/N' \cong \overline{M} \cong A^n$, quindi $A^2 \cong N' \oplus A^n \cong A^{2+n} \implies n = 0$, cioè $M = \mathrm{T}(M)$.

(b) M finitamente generato e senza torsione $\implies M = A^2/N \cong A^m$ per qualche $m \in \mathbb{N} \implies A^2 \cong N \oplus M$. $N \subseteq A^2$ sottomodulo $\implies N \cong A^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ $\implies A^2 \cong N \oplus M \cong A^{n+m} \implies n + m = 2$. $n \neq 0$ (altrimenti $N = \{0\}$) e $m \neq 0$ (altrimenti $M = \{0\}$, per cui $N = A^2$) $\implies m = n = 1$, cioè $M \cong N \cong A$.

Esercizio 7

(a) $\ker(e) \cap \operatorname{im}(e) = \{0\}$:
$x \in \ker(e) \cap \operatorname{im}(e) \implies e(x) = 0,\ \exists\, y \in M$ tale che $x = e(y)$
$\implies x = e(y) = e(e(y)) = e(x) = 0$.

$\ker(e) + \operatorname{im}(e) = M$:
$x \in M \implies e(x - e(x)) = e(x) - e(e(x)) = e(x) - e(x) = 0$
$\implies x = (x - e(x)) + e(x) \in \ker(e) + \operatorname{im}(e)$.

Esercizio 7

(a) $\ker(e) \cap \operatorname{im}(e) = \{0\}$:
$x \in \ker(e) \cap \operatorname{im}(e) \implies e(x) = 0$, $\exists\, y \in M$ tale che $x = e(y)$
$\implies x = e(y) = e(e(y)) = e(x) = 0$.

$\ker(e) + \operatorname{im}(e) = M$:
$x \in M \implies e(x - e(x)) = e(x) - e(e(x)) = e(x) - e(x) = 0$
$\implies x = (x - e(x)) + e(x) \in \ker(e) + \operatorname{im}(e)$.

(b) Se $\mathrm{End}_A(M)$ ha solo gli idempotenti banali, sia $M = M' \oplus M''$. Allora $\forall\, x \in M\ \exists!\, x' \in M', x'' \in M''$ tali che $x = x' + x'' \implies e\colon M \to M$, $x \mapsto x'$ è un idempotente di $\mathrm{End}_A(M)$ (perché $e(e(x)) = e(x') = x' = e(x)\ \forall\, x \in M$) $\implies e = 0$ (cioè $M' = \{0\}$ e $M'' = M$) o $e = 1 = \mathrm{id}_M$ (cioè $M' = M$ e $M'' = \{0\}$) $\implies M$ indecomponibile.

Se M è indecomponibile, sia $e \in \mathrm{End}_A(M)$ idempotente. Per il punto (a) $M = \ker(e) \oplus \operatorname{im}(e) \implies \ker(e) = M$ e $\operatorname{im}(e) = \{0\}$ ($\implies e = 0$) o $\ker(e) = \{0\}$ e $\operatorname{im}(e) = M$ ($\implies e$ isomorfismo $\implies \mathrm{id}_M = e^{-1} \circ e = e^{-1} \circ e^2 = e$).