Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 21-04-2020

Esercizio

G non abeliano, $n := \#G < 60 \implies G$ non semplice.

- $n = p^k$ (p primo, $k > 2$) $\implies G$ non semplice (già visto).
- n divisibile per 3 primi distinti p, q e $r \implies n = pqr$ (se no $n \geq 2pqr \geq 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$) $\implies G$ non semplice (già visto).
- Resta il caso $n = p^i q^j$ con p, q primi distinti e $i, j > 0$.
- $i, j \geq 2 \implies i = j = 2$ (se no $n \geq 2p^2q^2 \geq 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 72$) $\implies n = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ (se no $n \geq 2^2 \cdot 5^2 = 100$) $\implies$ un 3-Sylow ha indice 4 in $G \implies G$ non semplice (già visto).
- Posso supporre $j = 1$.
- $i = 1$ o $i = 2 \implies G$ non semplice (già visto).
- $q \leq 3 \implies$ un p-Sylow ha indice 2 o 3 in $G \implies G$ non semplice (già visto).
- Resta il caso $n = p^i q$ con $i > 2$ e $q \geq 5 \implies p^i < 60/5 = 12 \implies p = 2$, $i = 3 \implies q < 60/2^3 < 8 \implies q = 5$ o $q = 7 \implies n = 2^3 \cdot 5 = 40$ o $n = 2^3 \cdot 7 = 56$.
- $n = 40 \implies s_5 = 1$ (perché $s_5 \equiv 1 \mod 5$ e $s_5 \mid 8$) $\implies G$ non semplice.

Gruppi di ordine 56

$\#G = 56 \implies s_7 \equiv 1 \mod 7$ e $s_7 \mid 8 \implies s_7 = 1$ ($\implies G$ non semplice) o $s_7 = 8 \implies$

$$T := \{a \in G \, : \, \mathrm{ord}(a) = 7\}$$

tale che $\#T = s_7(7-1) = 8 \cdot 6 = 48$.
H 2-Sylow di $G \implies H \subseteq G \setminus T$, $\#H = 8 = \#(G \setminus T) \implies$
$H = G \setminus T \implies s_2 = 1 \implies G$ non semplice.

Richiami su S_n e A_n

- $\#S_n = n!$, $S_n = \langle \{2\text{-cicli}\} \rangle$.
- $\varepsilon\colon S_n \to \{\pm 1\} \cong C_2$ omomorfismo (suriettivo se $n \geq 2$) tale che $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m-1}$ se σ è un m-ciclo.
- $A_n := \ker(\varepsilon) \lhd S_n$, $\#A_n = n!/2\ \forall\, n \geq 2$, $A_n = \langle \{3\text{-cicli}\} \rangle$.
- $A_3 = \{1, (1,2,3), (1,3,2)\}$ e $S_3 \setminus A_3 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$.
- Gli unici sottogruppi non banali di S_3 sono A_3 (normale) e $\langle (1,2) \rangle$, $\langle (1,3) \rangle$, $\langle (2,3) \rangle$ (non normali).
- $A_4 = V_4 \coprod \{3\text{-cicli}\}$ e $S_4 \setminus A_4 = \{2\text{-cicli}\} \coprod \{4\text{-cicli}\}$ con
$$C_2^2 \cong V_4 := \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \lhd S_4$$
$(\implies V4 \lhd A_4)$, $\#\{3\text{-cicli}\} = 8$, $\#\{2\text{-cicli}\} = \#\{4\text{-cicli}\} = 6$.
- Gli unici sottogruppi normali non banali di S_4 sono V_4 e A_4: $H \lhd S_4 \implies \#H \mid 24$ e H è unione di classi di coniugio $\implies$ $\#H = 1 + 3a + 8b + 6c + 6d$ con $a, b, c, d \in \{0, 1\} \implies$ $a = 1$ e $c = d = 0$ se $1 < \#H < 24$.

Il coniugio in A_n

Osservazione

$H, K < G$ tali che $[G : K] = 2$ e $H \not\subseteq K \implies [H : H \cap K] = 2$: $K \lhd G \implies HK < G \implies [G : HK] < [G : K] = 2$ (perché $K \subsetneq HK$) $\implies HK = G \implies$ per il secondo teorema di isomorfismo $H/(H \cap K) \cong (HK)/K = G/K \cong C_2$.

$\forall\, \sigma \in A_n$, dato che $C_{A_n}(\sigma) = C_{S_n}(\sigma) \cap A_n$, si ha

$$\begin{cases} C_{A_n}(\sigma) = C_{S_n}(\sigma) & \text{se } C_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n \\ [C_{S_n}(\sigma) : C_{A_n}(\sigma)] = 2 & \text{se } C_{S_n}(\sigma) \not\subseteq A_n, \end{cases}$$

da cui segue (ricordando che $\#[\sigma]_G = [G : C_G(\sigma)]$ per $G = S_n$ o $G = A_n$, e tenendo conto che $[\sigma]_{A_n} \subseteq [\sigma]_{S_n}$)

$$\begin{cases} \#[\sigma]_{A_n} = \frac{\#A_n}{\#C_{A_n}(\sigma)} = \frac{\#S_n}{2\#C_{S_n}(\sigma)} = \frac{\#[\sigma]_{S_n}}{2} & \text{se } C_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n \\ [\sigma]_{A_n} = [\sigma]_{S_n} & \text{se } C_{S_n}(\sigma) \not\subseteq A_n. \end{cases}$$

Il coniugio in A_4

- $\sigma \in V_4 \setminus \{1\} \implies [\sigma]_{S_4} = V_4 \setminus \{1\} \implies \#[\sigma]_{S_4} = 3$ dispari $\implies [\sigma]_{A_4} = [\sigma]_{S_4} = V_4 \setminus \{1\}$.
- σ 3-ciclo $\implies [\sigma]_{S_4} = \{\text{3-cicli}\} \implies$
$$8 = \#[\sigma]_{S_4} = [S_4 : C_{S_4}(\sigma)] = \frac{24}{\#C_{S_4}(\sigma)}$$
$\implies \#C_{S_4}(\sigma) = 3 \implies C_{S_4}(\sigma) = \langle \sigma \rangle \subset A_4 \implies$ $\#[\sigma]_{A_4} = \#[\sigma]_{S_4}/2 = 4$ (i 3-cicli formano dunque 2 classi di coniugio in A_4).
- L'unico sottogruppo normale non banale di A_4 è V_4 (dunque $\nexists\, H < A_4$ tale che $\#H = 6$, anche se $6 \mid 12 = \#A_4$): $H \lhd A_4 \implies \#H \mid 12$ e H è unione di classi di coniugio $\implies$ $\#H = 1 + 3a + 4b + 4c$ con $a, b, c \in \{0, 1\} \implies a = 1$ e $b = c = 0$ se $1 < \#H < 12$.

Osservazione

$C_{S_4}((1,2)(3,4)) = V_4 \coprod \{(1,2), (3,4), (1,3,2,4), (1,4,2,3)\}$ e $\sigma \in V_4 \setminus \{1\} \implies C_{A_4}(\sigma) = V_4$ (esercizio).

Proposizione

$n \geq 5$, $\{1\} \neq H \lhd A_n \implies H$ contiene un 3-ciclo.

Teorema

A_n è semplice $\forall\, n \geq 5$.

Dimostrazione.

$\{1\} \neq H \lhd A_n \implies$ per la Proposizione $\exists\, \sigma = (a, b, c) \in H$.
$n \geq 5 \implies \exists\, \tau = (d, e) \in C_{S_n}(\sigma)$ (con a, b, c, d, e distinti) $\implies$
$C_{S_n}(\sigma) \not\subseteq A_n \implies$

$$[\sigma]_{A_n} = [\sigma]_{S_n} = \{\text{3-cicli}\} \subseteq H \lhd A_n$$

$\implies A_n = \langle \{\text{3-cicli}\} \rangle < H < A_n \implies H = A_n.$ $\square$

Corollario

A_5 è semplice e $\#A_5 = 60$.

Corollario

A_n è l'unico sottogruppo normale non banale di S_n $\forall\, n \geq 5$.

Dimostrazione.

- $H \triangleleft S_n \implies H' := H \cap A_n \triangleleft A_n \implies H' = \{1\}$ o $H' = A_n$.
- $H \subseteq A_n \implies H = H' \implies H = \{1\}$ o $H = A_n$.
- $H \not\subseteq A_n \implies [H : H'] = 2 \implies \#H = 2$ o $H = S_n$.
- Per assurdo $\#H = 2 \implies H = \{1, \tau\}$ (con $\tau \in S_n \setminus A_n$) $\implies \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\ \forall\, \sigma \in S_n \implies \tau \in Z(S_n)$, assurdo perché $Z(S_n) = \{1\}$ ($\forall\, n \geq 3$).

$\square$