Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 12-05-2020

Omomorfismi e isomorfismi di estensioni

Definizione

$i \colon K \to L$ e $i' \colon K \to L'$ estensioni. Un omomorfismo di estensioni di K (o semplicemente un K-omomorfismo) da i a i' è un omomorfismo di K-algebre, cioè un omomorfismo di anelli $j \colon L \to L'$ tale che $i' = j \circ i$.

Un tale omomorfismo è un isomorfismo di estensioni di K (o semplicemente un K-isomorfismo) se j è un isomorfismo.

Osservazione

$i \colon K \to L$ estensione induce omomorfismo di anelli

$$i \colon K[X] \to L[X] \qquad f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \mapsto i(f) = \sum_{n \geq 0} i(a_n) X^n.$$

Spesso si scriverà ancora f invece di $i(f) \in L[X]$. Se $\alpha \in L$, l'identificazione tra $f(\alpha) = \sum_{n \geq 0} a_n \alpha^n$ e $i(f)(\alpha) = \sum_{n \geq 0} i(a_n) \alpha^n$ è coerente con la struttura di K-spazio vettoriale su L.

Esistenza di omomorfismi di estensioni

Proposizione

$K \subseteq K'$ e $i\colon K \to L$ estensioni, $\alpha \in K'$ algebrico su K, $\beta \in L$. Allora esiste un K-omomorfismo $j\colon K(\alpha) \to L$ tale che $j(\alpha) = \beta$ $\iff$ $\mathrm{m}_{\alpha,K}(\beta) = 0$; inoltre se esiste è unico.

Dimostrazione.

α algebrico su $K \implies K(\alpha) = K[\alpha] \cong K[X]/(\mathrm{m}_{\alpha,K})$.

Dunque va dimostrato che $\exists$ (unico) K-omomorfismo $K[X]/(\mathrm{m}_{\alpha,K}) \to L$ tale che $\overline{X} \mapsto \beta \iff \mathrm{m}_{\alpha,K}(\beta) = 0$.

Per il teorema di omomorfismo per anelli dare un omomorfismo di anelli $\overline{\varphi}\colon K[X]/(\mathrm{m}_{\alpha,K}) \to L$ equivale a dare un omomorfismo di anelli $\varphi\colon K[X] \to L$ tale che $(\mathrm{m}_{\alpha,K}) \subseteq \ker(\varphi)$, e chiaramente $\overline{\varphi}$ è un K-omomorfismo $\iff$ φ è un omomorfismo di K-algebre.

Poiché $\forall\, \beta \in L\ \exists!\, \varphi\colon K[X] \to L$ omomorfismo di K-algebre tale che $\varphi(X) = \beta$, per concludere basta osservare che per un tale φ $(\mathrm{m}_{\alpha,K}) \subseteq \ker(\varphi) \iff 0 = \varphi(\mathrm{m}_{\alpha,K}) = \mathrm{m}_{\alpha,K}(\beta)$. $\square$

Unicità del campo di spezzamento

Teorema

$K \subseteq K'$ campo di spezzamento di $f \in K[X] \setminus \{0\}$, $i\colon K \to L$ estensione. Allora esiste un K-omomorfismo $i'\colon K' \to L \iff f$ si spezza su L.

Corollario

K campo, $f \in K[X] \setminus \{0\} \implies$ un campo di spezzamento di f esiste e è unico a meno di K-isomorfismo.

Dimostrazione.

Esistenza già vista.
Se $K \subseteq K'$ e $i\colon K \to L$ sono due campi di spezzamento di f, per il Teorema $\exists$ K-omomorfismo $i'\colon K' \to L$. Sempre per il Teorema f si spezza su $i'(K') \subseteq L \implies i'(K') = L$. $\square$

Osservazione

Segue dal Corollario che il grado $[K' : K]$ di un campo di spezzamento $K \subseteq K'$ di $f \in K[X] \setminus \{0\}$ dipende solo da f.

Dimostrazione del Teorema

Per ipotesi $\exists\, c \in K^*$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K'$ (con $n = \deg(f)$) tali che $f = c\prod_{l=1}^{n}(X - \alpha_l)$ e $K' = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

$\Longrightarrow$ $f = i'(f) = c\prod_{l=1}^{n}(X - i'(\alpha_l))$ si spezza su L.

$\Longleftarrow$ Per induzione su n: $n = 0 \implies K' = K$ e $i' = i$.
$n > 0 \implies \mathrm{m}_{\alpha_1,K}$ si spezza su L (perché $\mathrm{m}_{\alpha_1,K} \mid f$ e f si spezza su L) $\implies \exists\, \beta \in L$ tale che $\mathrm{m}_{\alpha_1,K}(\beta) = 0 \implies$ per la Proposizione $\exists$ K-omomorfismo $j\colon K(\alpha_1) \to L$ (tale che $j(\alpha_1) = \beta$) $\implies$

$$g := \prod_{l=2}^{n}(X - \alpha_l) \in K(\alpha_1)[X]$$

tale che $\deg(g) = n - 1$, $K(\alpha_1) \subseteq K'$ campo di spezzamento di g e g si spezza su L (perché $g \mid f$ e f si spezza su L) $\implies$ per induzione $\exists$ $K(\alpha_1)$-omomorfismo (e dunque K-omomorfismo) $i'\colon K' \to L$.

Unicità della chiusura algebrica

Teorema

$K \subseteq L$ estensione algebrica, $i\colon K \to \overline{K}$ chiusura algebrica di K $\implies$ esiste un K-omomorfismo $j\colon L \to \overline{K}$.

Osservazione

$L \subseteq L'$ estensione algebrica, L algebricamente chiuso $\implies$ $L = L'$:
$\alpha \in L' \implies \mathrm{m}_{\alpha,L} \in L[X]$ irriducibile e monico con una radice in L $\implies \deg(\mathrm{m}_{\alpha,L}) = 1 \implies \mathrm{m}_{\alpha,L} = X - \alpha \implies \alpha \in L$.

Corollario

K campo $\implies$ una chiusura algebrica di K è unica a meno di K-isomorfismo.

Dimostrazione.

$K \subseteq L$ e $i\colon K \to \overline{K}$ chiusure algebriche di K $\implies$ per il Teorema $\exists$ K-omomorfismo $j\colon L \to \overline{K}$.
j estensione algebrica (perché i lo è), L algebricamente chiuso $\implies$ j K-isomorfismo per l'Osservazione. □

Nell'insieme parzialmente ordinato e $\neq \emptyset$

$$\{(L', j') \ : \ K \subseteq L' \subseteq L \text{ estensioni, } j' \colon L' \to \overline{K} \ \ K\text{-omomorifsmo}\}$$

(in cui $(L', j') \leq (L'', j'') \iff L' \subseteq L''$ e $j''|_{L'} = j'$) ogni catena $\{(L_\lambda, j_\lambda) \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ ha un maggiorante $(\tilde{L}, \tilde{j})$ con $\tilde{L} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ e

$$\tilde{j} \colon \tilde{L} \to \overline{K} \qquad \alpha \mapsto j_\lambda(\alpha) \qquad \text{se } \alpha \in L_\lambda$$

(esercizio). Per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale (L_0, j_0), e basta dimostrare $L_0 = L$.
$\alpha \in L \implies \alpha$ algebrico su $K \implies \alpha$ algebrico su L_0.
$\overline{K}$ algebricamente chiuso $\implies \exists\, \beta \in \overline{K}$ tale che $\mathrm{m}_{\alpha, L_0}(\beta) = 0$ $\implies$ per la Proposizione $\exists$ L_0-omomorfismo $j_0' \colon L_0(\alpha) \to \overline{K}$ (tale che $j_0'(\alpha) = \beta$) $\implies (L_0, j_0) \leq (L_0(\alpha), j_0') \implies L_0 = L_0(\alpha)$ per la massimalità di $(L_0, j_0) \implies \alpha \in L_0$.