Corso di Algebra - a.a. 2008-2009

Prova scritta del 25.6.2009

1. (a) Siano G e H due gruppi. Si mostri che il centro di $G \times H$ è il prodotto dei centri di G e H.

   (b) Dimostrare che i gruppi S_4 e $A_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non sono isomorfi.

2. Siano G, H, K gruppi, e $\alpha\colon H \to G$, $\beta\colon K \to G$ omomorfismi. Poniamo

$$H \times_G K = \{(h,k) \in H \times K : \alpha(h) = \beta(k)\}$$

   (a) Mostrare che $H \times_G K$ è un sottogruppo di $H \times K$.

   (b) Se G, H, K sono finiti e α e β suriettivi, mostrare che l'ordine di $H \times_G K$ è $|H||K|/|G|$.

3. Per quali coppie di interi positivi (n, m) esiste un omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

4. Sia A un anello commutativo e sia P un ideale proprio in A. Mostrare che P è un ideale primo se e solo se, per ogni coppia di ideali I, J tali che $IJ \subset P$, o $I \subset P$ oppure $J \subset P$.

5. Fattorizzare il polinomio $2X^4 - 2X^2 - 4$ in $\mathbb{Z}[X]$ e determinare il grado del suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$.

Soluzioni

1. (a) Dire che (g,h) commuta con (ξ,η) per ogni $(\xi,\eta) \in G \times H$ equivale a dire che g commuta con ξ per ogni $\xi \in G$ e che h commuta con η per ogni $\eta \in H$. Quindi $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.

   (b) Il centro di S_4 è banale mentre quello di $A_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è $Z(A_4) \times Z(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \supset 1 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. (a) $H \times_G K$ non è vuoto perchè contiene $(1,1)$. Siano (h,k) e (h',k') elementi di $H \times_G K$. Dunque $\alpha(h) = \beta(k)$ e $\alpha(h') = \beta(k')$. Ma $(h,k)^{-1}(h',k') = (h^{-1}h', k^{-1}k')$ appartiene a $H \times_G K$ perchè $\alpha(h^{-1}h') = \alpha(h)^{-1}\alpha(h') = \beta(k)^{-1}\beta(k') = \beta(k^{-1}k')$.

   (b) L'applicazione $\gamma\colon H \times_G K \to H$ data da $(h,k) \mapsto h$ è un omomorfismo suriettivo, il cui nucleo è $\{1\} \times \ker\beta$. Quindi

$$|H \times_G K| = |H||\ker\gamma| = |H||\ker\beta| = |H|(|K|/|G|)$$

3. Se $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è un omomorfismo di anelli, $\alpha(1) = \overline{1}$, e quindi $\alpha(k) = k\overline{1} = \overline{k}$ per ogni intero k. In altre parole, α è il passaggio al quoziente modulo n. Per il teorema di omomorfismo, dunque, un omomorfismo di anelli $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ esiste se e solo se $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$, cioè se e solo se $m|n$.

4. Supponiamo P primo. Se $I \not\subset P$ e $J \not\subset P$, ci sono $i \in I$ e $j \in J$ che non appartengono a P. Quindi $ij \notin P$ perchè P è primo.

   Viceversa, supponiamo che, dati comunque ideali I, J tali che $IJ \subset P$, uno tra I e J sia contenuto in P. Siano a, b elementi di A tali che $ab \in P$, e poniamo $I = Aa$, $J = Ab$. Allora $IJ = Aab \subset P$, e quindi $I \subset P$ o $J \subset P$ per ipotesi; in altre parole $a \in P$ oppure $b \in P$. Questo significa che P è primo.

5. $2X^4 - 2X^2 - 4 = 2(X^2 - 2)(X^2 + 1)$ è una decomposizione in fattori irriducibili. Infatti $X^2 - 2$ e $X^2 + 1$ sono irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$ in quanto hanno grado 2 e non hanno radici razionali; sono irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$ perchè sono primitivi e irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$. Un campo di spezzamento di $2X^4 - 2X^2 - 4$ è dunque $L = \mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]$. Inoltre

$$[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]][\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$$

Infatti il polinomio minimo di i su $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ divide $X^2 + 1$, e quindi $[L : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]]$ divide 2; d'altra parte questo grado non può valere 1 perchè $i \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.