Corso di Algebra Lineare - a.a. 2013-2014

Prova scritta del 20.2.2014 – testo A

1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Sono dati i punti C di coordinate $(1, 0, -1)$, P di coordinate $(3, 1, 1)$, Q di coordinate $(3, 4, 1)$, R di coordinate $(1, 2, 1)$ e T di coordinate $(2, 4, 1)$, nonché il vettore $v = {}^t(2, -1, 1)$. Sia r la retta passante per R la cui giacitura è generata dal vettore v.

   (a) Scrivere equazioni cartesiane per la sfera S di centro C passante per P e per il piano π passante per Q e contenente la retta r.

   (b) Determinare la posizione relativa di r e S. I punti P, Q e T sono allineati?

   (c) Scrivere la condizione per cui una retta passante per Q e la cui giacitura sia generata da un generico vettore ${}^t(a, b, c)$ sia tangente alla sfera S e dedurne un'equazione del cono tangente a S da Q (che è l'unione di tutte le rette tangenti a S passanti per Q, se ne esistono).

   (Punti 3+3+2)

2. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensioni rispettivamente 4 e 3, $\mathcal{B}$ una base di V, $\mathcal{C}$ una base di W e $f : V \to W$ un'applicazione lineare la cui matrice associata nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ risulta essere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) f è suriettiva?

   (b) Sia Z un sottospazio di V di dimensione 3 che contiene in particolare i vettori v_1, v_2 e v_3 di coordinate rispettivamente ${}^t(1, -1, 1, 1)$, ${}^t(2, 0, -1, 1)$ e ${}^t(1, 1, -2, 0)$. Determinare la dimensione dello spazio generato da v_1, v_2 e v_3 e, se possibile, la dimensione di $(\ker f) \cap Z$.

   (Punti 3+2)

3. Consideriamo i seguenti elementi di $\mathbb{C}^3$:

$$v_1 = {}^t(1, 0, -1) \qquad v_2 = {}^t(1, 0, 1) \qquad v_3 = {}^t(0, 1, -1)$$

   (a) Mostrare che esiste una e una sola applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che:

$$f(v_1) = {}^t(1 + i, 1, 1 - i) \quad f(v_2) = {}^t(-1 + i, 1, 1 + i) \quad f(v_3) = {}^t(2, i, -i)$$

   (b) Trovare la matrice di f rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel codominio).

   (c) Trovare autovalori, autovettori e polinomio caratteristico di f.

   (d) Decidere se f è diagonalizzabile.

   (Punti 1+3+3+2)

4. Sia ϕ la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$ definita da $\phi(v, w) = {}^t vQw$, dove

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che sia ortogonale per ϕ.

   (b) Calcolare rango e segnatura di ϕ.

   (c) Sia A una matrice reale simmetrica. Mostrare che $A^5 + A^3 + A$ ha lo stesso rango e segnatura di A.

   (Punti 3+3+2)

Soluzioni

1. (a) Poiché P deve appartenere a S e $d(C,P) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2 + (1+1)^2} = 3$, l'equazione della sfera S è
$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9;$$
poiché poi la giacitura del piano π deve contenere, oltre a v, anche il vettore $Q - R = {}^t(2,2,0)$, deve appartenere al fascio improprio di piani di equazione $-x+y+3z+\lambda = 0$; imponendo il passaggio per Q (o per R) si ottiene che $\lambda = -4$, e perciò un'equazione per π è appunto
$$x - y - 3z = -4.$$

   (b) La retta r ammette come equazione parametrica $(1,2,1) + t\,{}^t(2,-1,1)$, cioè i suoi punti sono del tipo $(1+2t, 2-t, 1+t)$. Sostituendo queste espressioni nell'equazione della sfera S si trova un'equazione di secondo grado per t, $6t^2 - 1 = 0$, che ammette due soluzioni: perciò r e S sono secanti. Quanto ai punti P, Q e T, perché siano allineati dovrebbe verificarsi (poiché T e P sono distinti) che il vettore differenza $Q - P$ sia un multiplo di $T - P$; ma il primo risulta essere ${}^t(0,3,0)$, mentre il secondo ${}^t(-1,3,0)$, che sono linearmente indipendenti.

   (c) la condizione di tangenza di una retta espressa in forma parametrica come $(3,4,1) + t\,{}^t(a,b,c)$ può scriversi come l'annullarsi del discriminante dell'equazione di secondo grado ottenuta sostituendo la parametrizzazione dei punti della retta nell'equazione della sfera S (come nella parte b)). Tale condizione risulta pertanto
$$(2a+4b+2c)^2 - 15(a^2+b^2+c^2) = -11a^2 + b^2 - 11c^2 + 16ab + 8ac + 16bc = 0.$$
Moltiplicando questa equazione per t^2 e ricordando che $x = 3+at, y = 4+bt$ e $z = 1+ct$ si ottiene l'equazione cercata per il cono tangente:
$$-11(x-3)^2 + (y-4)^2 - 11(z-1)^2 + 16(x-3)(y-4) + 8(x-3)(z-1) + 16(y-4)(z-1) = 0.$$

2. (a) f è suriettiva se e solo se la sua matrice associata ha rango pari alla dimensione dello spazio di arrivo W, cioè 3. Ma è facile vedere che A ha rango 2; perciò f non è suriettiva.

   (b) Chiamiamo U lo spazio generato dai v_i; poiché $v_1 = v_2 - v_3$, mentre v_2 e v_3 non sono uno multiplo dell'altro (o, equivalentemente, poiché il rango della matrice di cui i v_i sono righe, o colonne, calcolato ad esempio con l'eliminazione di Gauss, è 2), la dimensione di U risulta essere 2.

   La dimensione di $\ker f$, d'altra parte, è a sua volta 2, per la formula sulla dimensione del nucleo e dell'immagine di f e il risultato del punto a) sul rango di A; e $\ker f \cap U = \{O\}$, come si verifica ad esempio moltiplicando A per una arbitraria combinazione lineare delle coordinate di v_2 e v_3.

   A questo punto, poiché lo spazio in cui si trovano Z e $\ker f$, V, ha dimensione 4, i valori possibili per $\dim(\ker f \cap Z)$ sono solamente 1 o 2 (un sottospazio di dimensione 3 e uno di dimensione 2 non possono avere in comune solo il vettore nullo in V); ma 2 è impossibile, perché in tal caso $\ker f \cap Z$ e U sarebbero due sottospazi di dimensione 2 in uno spazio, Z, di dimensione 3, la cui intersezinoe ha dimensione 0, contraddicendo la formula di Grassmann: perciò $\dim(\ker f \cap Z) = 1$.

3. (a) v_1, v_2, v_3 è una base di $\mathbb{C}^3$. Quindi dati comunque elementi w_1, w_2, w_3 di $\mathbb{C}^3$ esiste una e una sola applicazione lineare f tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni i.

(b) Se indichiamo con e_1, e_2, e_3 la base standard di $\mathbb{C}^3$ si ha che $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_1 + e_3$ e $v_3 = e_2 - e_3$. Quindi $2e_1 = v_1 + v_2$, $2e_2 = 2v_3 + v_2 - v_1$ e $2e_3 = v_2 - v_1$. Ne segue che

$$f(e_1) = \frac{1}{2}(f(v_1) + f(v_2)) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = v_3 + \frac{1}{2}(f(v_2) - f(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \frac{1}{2}(f(v_2) - f(v_1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} i & 1 & -1 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

(c) Il polinomio caratteristico è $P(X) = X^3 - 3iX^2 - 3X + i = (X - i)^3$. Quindi f ha il solo autovalore i, che ha molteplicità 3. L'equazione per gli autovettori è

$$\begin{pmatrix} i & 1 & -1 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} ix = ix + y - z \\ iy = x + iy \\ iz = x + iz \end{cases}$$

Le sole soluzioni di questo sistema sono quelle della forma ${}^t(0, a, a)$, dove $a \in \mathbb{C}$. In particolare l'autospazio in questione ha dimensione 1.

(d) f non è diagonalizzabile perché l'autovalore i ha molteplicità 3 ma il corrispondente autospazio ha dimensione 1.

4. (a) I vettori v tali che $Qv = 0$ sono tutti e soli quelli della forma ${}^t(0, a, 0, -a)$. Poniamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Poniamo $v_2 = e_1$, dove e_1 è il primo vettore della base standard, e notiamo che $\phi(v_2, v_2) = 1$. I vettori ortogonali a v_2 sono tutti e soli quelli della forma ${}^t(x, y, -x, -w)$. Tra questi scegliamo ad esempio

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e notiamo che $\phi(v_3, v_3) = -1$. I vettori ortogonali sia a v_2 che a v_3 sono tutti e soli quelli della forma ${}^t(x, y, -x, -x - y)$. Tra questi scegliamo ad esempio

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e notiamo che $\phi(v_4, v_4) = 8$. Quindi rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4 la matrice di ϕ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Segue dal punto precedente che il rango è 3 e la segnatura $2 - 1 = 1$.

(c) Per il teorema spettrale esistono una matrice ortogonale U e una matrice diagonale

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \dots \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

tali che $A = U^{-1}\Lambda U$. Il rango di A è uguale a quello di Λ, che è il numero di termini diagonali non nulli. La segnatura di A è uguale a quella di Λ, che è la differenza tra il numero di termini diagonali positivi e quello dei termini diagonali negativi. Quindi

$$\begin{aligned} A^5 + A^3 + A &= U^{-1}(\Lambda^5 + \Lambda^3 + \Lambda)U \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1^5 + \lambda_1^3 + \lambda_1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^5 + \lambda_2^3 + \lambda_2 & 0 & & \dots \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n^5 + \lambda_n^3 + \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ora $\lambda_i^5 + \lambda_i^3 + \lambda_i$ è positivo o negativo se e solo se lo è λ_i. Ne segue che rango e segnatura di $A^5 + A^3 + A$ sono uguali a quelli di A.