Corso di Algebra Lineare - a.a. 2013-2014

Prova scritta del 27.1.2014

1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Sono dati i punti P_1, P_2 e C di coordinate rispettivamente $(1,0,2)$, $(2,1,1)$ e $(-1,3,1)$ e il piano π di equazione $x+y-2z-1=0$.

   (a) Scrivere equazioni cartesiane per la sfera S di centro C e raggio $R=3$ e per la retta s_1 passante per P_1 e P_2, ed un'equazione parametrica per il piano π.

   (b) Determinare le posizioni relative di π e S e di s_1 e S; la retta s_1 è perpendicolare al piano π?

   (c) Sia s_2 una retta sghemba rispetto a s_1. Esiste sempre (almeno) una retta r che intersechi s_1 e s_2 e sia tangente alla sfera S? Giustificare la risposta.

   (Punti 3+3+2)

2. (a) Discutere il sistema

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -4x+(t+2)z+w=1 \\ 2x+3y+(2t-2)z+(3-2t)w=t \end{cases}$$

   al variare del parametro reale t.

   (b) Un sistema lineare ha la forma $Ax=b$, dove A è una matrice reale 4×4 in cui le prime tre colonne non sono linearmente indipendenti (ma nessuna di esse è nulla) e $b\neq 0$. Il sistema può non avere soluzione? Può avere una sola soluzione? Se può averne infinite, quanti parametri lineari al massimo serviranno per descriverle?

   (Punti 3+2)

3. (a) Mostrare che

$$v_1 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad v_2 = {}^t\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad v_3 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

   è una base di $\mathbb{R}^3$.

   Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(v_1) = {}^t\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\end{pmatrix} \quad f(v_2) = {}^t\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad f(v_3) = {}^t\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

   (b) Trovare la matrice di f rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel codominio).

   (c) Calcolare autovalori e autovettori di f

   (d) Decidere se f è diagonalizzabile.

   (Punti 1+3+3+2)

4. Sia q la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da $q(v) = {}^t vQv$, dove

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare rango e segnatura di q.

   (b) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che sia ortogonale per q.

   (c) Mostrare che se M è una matrice reale simmetrica esistono matrici reali simmetriche definite positive A e B tali che $M=A-B$ e $AB=BA$.

   (Punti 3+3+2)

Soluzioni

1. (a) L'equazione della sfera S è

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9;$$

equazioni per s_1 sono ad esempio

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} ;$$

un'equazione parametrica per il piano π è ad esempio

$${}^t(2,1,1) + t_1{}^t(1,-1,0) + t_2{}^t(2,0,1)$$

(b) la distanza tra il punto C e il piano π è

$$\frac{|-1+3-2-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{6} < 3$$

perciò il piano è secante rispetto a S; i punti di s_1 possono essere rappresentati come $(2+t, 1+t, 1-t)$, quindi nei punti di eventuale intersezione tra s_1 ed S il parametro t dovrebbe risolvere l'equazione

$$(2+t+1)^2 + (1+t-3)^2 + (1-t-1)^2 = 9,$$

che equivale a

$$3t^2 + 2t + 4 = 0,$$

che non ammette soluzioni reali: quindi la retta è esterna alla sfera. Infine, la giacitura di s_1 è generata dal vettore ${}^t(1,1,-1)$, mentre il vettore normale a π è il vettore ${}^t(1,1,-2)$: poiché questi due vettori non sono uno multiplo dell'altro, s_1 non è perpendicolare a π.

(c) La risposta è affermativa (anzi, esistono sempre infinite rette con le caratteristiche indicate). Infatti, consideriamo il piano π' che contiene la retta s_1 e il punto C (o qualunque altro punto interno alla sfera): poiché s_1 e s_2 sono sghembe, π' e s_2 si intersecano in un punto che chiamiamo T. Tutte le rette passanti per T e contenute nel piano π' intersecano la retta s_1, tranne una, la parallela a s_1 per T. D'altra parte, π ed S si intersecano in una circonferenza di raggio massimo, perché π passa per il centro della sfera (se abbiamo preso un altro punto interno la circonferenza potrebbe essere più piccola, ma rimarrebbe comunque una circonferenza): perciò esistono in π' due rette tangenti a questa circonferenza condotte da T e almeno una delle due non è parallela ad s_1 e soddisfa perciò le condizioni richieste.

2. (a) Tramite eliminazione di Gauss il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2y + tz + w = 1 \\ (t-1)z + (2-2t)w = t-1 \end{cases}$$

da cui è immediato determinare il rango della matrice dei coefficienti (3 per $t \neq 1$, 2 per $t = 1$) e quello della matrice completa (che coincide con quello della matrice dei coefficienti per ogni fissato valore di t). Perciò il sistema è sempre compatibile, ma per $t \neq 1$ le soluzioni dipendono da 1 solo parametro lineare, mentre per $t = 1$ esse dipendono da 2 parametri lineari liberi.

(b) Se le prime tre colonne della matrice A sono linearmente dipendenti il rango di A non può essere 4, e se esse non sono nulle il rango non può essere 0; può invece assumere tutti i valori intermedi. Poiché $b \neq 0$, il sistema può non essere compatibile e quindi non avere affatto soluzione, se b non appartiene allo spazio generato dalle colonne di A (cosa possibile perché esso non può avere dimensione 4); viceversa, se b appartiene a tale spazio, il sistema sarà risolubile, ma non può avere una soluzione unica: a seconda del rango di A le soluzioni possono dipendere da 1, 2 o al massimo 3 parametri lineari liberi.

3. (a) La matrice le cui colonne sono v_1, v_2, v_3 ha determinante 1.

(b) Indichiamo con e_1, e_2, e_3 la base canonica. Allora $e_1 = v_3 - v_2$, $e_2 = v_1 + v_2 - v_3$ e $e_3 = v_3 - v_1$. Quindi

$$f(e_1) = f(v_3) - f(v_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matrice cercata è dunque

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Il polinomio caratteristico di f è

$$P(x) = \det(xI - A) = x^3 + x^2 - x - 1$$

che ha evidentemente 1 e -1 come radici. Più esattamente

$$P(x) = (x-1)(x+1)^2$$

Quindi gli autovalori sono 1, con molteplicità 1, e -1, con molteplicità 2. Un autovettore per l'autovalore 1 è

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $-I - A$ ha rango 2 e quindi l'autospazio dell'autovalore -1 ha dimensione 1; un suo generatore è ad esempio

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Dato che la molteplicità dell'autovalore -1 è 2 e l'autospazio corrispondente ha dimensione 1, l'endomorfismo f non è diagonalizzabile.

4. (a) Sia V il sottospazio dei vettori della forma

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Per questi vettori

$$q(v) = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2(x^2 + xy + y^2)$$

D'altra parte

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + y^2 + (x + y)^2$$

che è sempre non negativo ed è nullo solo quando $x = y = 0$. Quindi la forma quadratica è definita positiva su V, che ha dimensione 2. Analogamente, la forma è definita negativa sul sottospazio, anch'esso bidimensionale, dei vettori della forma

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

per i quali vale

$$q(w) = -3x^2 + 4xy - 2y^2 = -x^2 - 2(x^2 - 2xy + y^2) = -x^2 - (x - y)^2$$

In definitiva la forma q ha rango 4 e segnatura 0 (o anche, con una diversa definizione, segnatura $(2, 2)$).

(b) Sia e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Cerchiamo innanzitutto una base ortogonale di V. Poniamo $v_1 = e_1$ e cerchiamo un vettore della forma (1) che gli sia ortogonale, tale cioè che ${}^t v_1 Q v = 0$. Questo si traduce in $2x + y = 0$. Dunque se poniamo

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora ${}^t v_1 Q v_2 = 0$. Inoltre ${}^t v_1 Q v_1 > 0$ e ${}^t v_2 Q v_2 > 0$ dato che q è definita positiva su V. Notiamo poi che e_3 è ortogonale a V e che ${}^t e_3 Q e_3 = -3$. Poniamo $v_3 = e_3$. Resta solo da trovare un vettore

$$v_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{pmatrix}$$

non nullo che sia ortogonale a v_1, v_2, v_3. Le condizioni di ortogonalità sono equivalenti al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ -3w + 2z = 0 \end{cases}$$

Una soluzione è

$$v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dunque v_1, v_2, v_3, v_4 sono una base ortogonale per la forma q.

(c) Per il teorema spettrale esiste una matrice ortogonale O tale che $O^{-1} M O = \Delta$, dove

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

è diagonale. Sia k un numero reale maggiore del massimo dei valori assoluti dei d_i. Allora $A' = \Delta + kI$ è diagonale e definita positiva. Ma allora

$$M = O\Delta O^{-1} = O(A' - kI)O^{-1} = A - B$$

dove $A = OA'O^{-1}$ e $B = kI$. Inoltre $A = O(A')^t O$ perché O è ortogonale, quindi A è definita positiva. Anche B è definita positiva e

$$AB = kA = BA$$