**Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004**

*Prova scritta del 3.2.2004*

1. Sia $Oxyz$ un fissato sistema di riferimento cartesiano ortogonale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Siano $P_1, P_2$ e $P_3$ i punti rispettivamente di coordinate $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right), (2, -1, -1)$ e $(2, -3, -2)$.

   (a) Trovare un vettore ortogonale al piano $\pi$ passante per $P_1, P_2$ e $P_3$ ed avente lunghezza 1.

   (b) Scrivere le equazioni delle due sfere tangenti a $\pi$ nel punto $P_1$ ed aventi raggio $\frac{3}{2}$.

   (c) Trovare la distanza tra la sfera $S$ di centro nel punto $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$ e l'insieme costituito dall'unione delle due sfere del punto precedente.

   **Punti (3+4+4)**

2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(1,1,1) = (2,1,2)$, $f(1,0,2) = (2,0,3)$, $f(2,1,2) = (3,1,3)$.

   (a) Calcolare gli autovalori di $f$ e i relativi autospazi;

   (b) mostrare che $f$ non è diagonalizzabile;

   (c) trovare una base del sottospazio $Z = W \cap U \subset \mathbb{R}^3$, dove $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x+y+2z = 0\}$ e $U$ è il sottospazio generato da $(1,1,1)$ e $(2,0,1)$

   (d) costruire una applicazione lineare diagonalizzabile $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(g) = Z$.

   **Punti (5+2+3+3)**

3. Sia $M$ una matrice complessa $3 \times 3$. Supponiamo che $M^3 = -M$.

   Vero o Falso:

   (a) il polinomio caratteristico di $M$ è sempre uguale a $X^3 + X$;

   (b) se $M$ ha tre autovalori distinti, il polinomio minimo di $M$ è sempre uguale a $X^3 + X$;

   (c) $M$ è diagonalizzabile.

   **Punti (2+2+2)**