

Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004

Prova scritta del 16.6.2004

Compito A

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia Π il piano contenente il punto di coordinate $(1, 1, 1)$ e la cui giacitura è generata dai due vettori $(1, 2, 1)$ e $(2, 2, -1)$.
 - (a) Verificare che il punto $Q = (0, 3, 6)$ appartiene al piano e scrivere le equazioni cartesiane per la retta r perpendicolare a Π e passante per Q ;
 - (b) dimostrare che la retta s passante per il punto $(2, -1, 1)$ e la cui giacitura è generata dal vettore $(-1, 0, 2)$ non interseca la retta r ;
 - (c) qual è la posizione relativa di Π e s ? Se sono incidenti, trovare il punto di intersezione; se sono paralleli, trovare la distanza tra loro.

Punti (3+4+4)

2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a due. Siano $U = \{p(t) = 2at^2 + (a + b)t + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ e W lo spazio generato da $1 + t + t^2$.
 - a) Si determini una base di U .
 - b) Determinare se $U \oplus W = V$.

Si consideri l'operatore lineare $F : V \rightarrow V$,

$$F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_0 + (a_2 - a_1)t + (a_0 + 2a_2)t^2.$$

- c) Scrivere la matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$.
- d) Determinare se l'applicazione lineare F è iniettiva o è suriettiva.
- e) Verificare se $F(U) \oplus F(W) = V$.
- f) Determinare se F è diagonalizzabile.

Punti (2+2+3+2+2+2)

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{C} , e siano f e g endomorfismi di V . Supponiamo che esistano interi n e m tali che f^n e g^m siano uguali all'applicazione identità di V in sè. Sia W un sottospazio di V tale che $f(W) \subset W$ e $g(W) \subset W$.
 - (a) Mostrare che esiste un sottospazio U di V tale che $f(U) \subset U$ e che V sia somma diretta di W e U ;
 - (b) mostrare che, se $f \circ g = g \circ f$, il sottospazio U del punto (a) può essere scelto in modo tale che anche $g(U)$ sia contenuto in U ;
 - (c) mostrare con un esempio che la conclusione di (b) non vale in generale se non si suppone che $f \circ g = g \circ f$.

Punti (2+2+2)

%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004

Prova scritta del 16.6.2004

Compito B

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia Π il piano contenente il punto di coordinate $(2, -1, 1)$ e la cui giacitura è generata dai due vettori $(1, -2, 2)$ e $(-1, 1, 1)$.
 - (a) Verificare che il punto $Q = (-3, 6, 0)$ appartiene al piano e scrivere le equazioni cartesiane per la retta r perpendicolare a Π e passante per Q ;
 - (b) dimostrare che la retta s passante per il punto $(3, 1, 2)$ e la cui giacitura è generata dal vettore $(0, -1, 3)$ non interseca la retta r ;
 - (c) qual è la posizione relativa di Π e s ? Se sono incidenti, trovare il punto di intersezione; se sono paralleli, trovare la distanza tra loro.

Punti (3+4+4)

2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a due. Siano $U = \{p(t) = at^2 + (2b - a)t + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ e W lo spazio generato da $2 + t - t^2$.
 - a) Si determini una base di U .
 - b) Determinare se $U \oplus W = V$.

Si consideri l'operatore lineare $F : V \rightarrow V$,

$$F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = -a_1 + (2a_0 + 3a_1)t + (a_0 - 3a_2)t^2.$$

- c) Scrivere la matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$.
- d) Determinare se l'applicazione lineare F è iniettiva o è suriettiva.
- e) Verificare se $F(U) \oplus F(W) = V$.
- f) Determinare se F è diagonalizzabile.

Punti (2+2+3+2+2+2)

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{C} , e siano f e g endomorfismi di V . Supponiamo che esistano interi n e m tali che f^n e g^m siano uguali all'applicazione identità di V in sè. Sia W un sottospazio di V tale che $f(W) \subset W$ e $g(W) \subset W$.
 - (a) Mostrare che esiste un sottospazio U di V tale che $f(U) \subset U$ e che V sia somma diretta di W e U ;
 - (b) mostrare che, se $f \circ g = g \circ f$, il sottospazio U del punto (a) può essere scelto in modo tale che anche $g(U)$ sia contenuto in U ;
 - (c) mostrare con un esempio che la conclusione di (b) non vale in generale se non si suppone che $f \circ g = g \circ f$.

Punti (2+2+2)

%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.