10. Esponenziale di una matrice

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice a elementi in K, dove K è il campo reale o il campo complesso. La *norma* di A è

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|\,.$$

Osserviamo che, se λ è uno scalare e A e B sono matrici delle stesse dimensioni, allora

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|\,,$$
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|\,.$$

La prima di queste due relazioni è ovvia, mentre la seconda segue dalla considerazione che $\|A + B\| = |a_{ij} + b_{ij}|$ per qualche scelta di i e j, e dunque

$$\|A + B\| = |a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}| \leq \|A\| + \|B\|\,.$$

Notiamo incidentalmente che quella appena definita non è la sola norma sensata definibile sulle matrici reali o complesse; la scelta che abbiamo fatto è solo la più conveniente per i nostri scopi. Notiamo anche che, se A è una matrice $n \times m$ e B è una matrice $m \times k$, allora

$$\|AB\| \leq m\|A\|\|B\|\,. \tag{10.1}$$

Sia ora A_i, $i = 0, 1, \dots$ una successione di matrici $n \times m$ a elementi in K, e indichiamo con $a^{(i)}_{hk}$ l'elemento di posto h, k in A_i. Diremo che la successione $\{A_i\}$ converge alla matrice A, e scriveremo $A_i \to A$, se $a^{(i)}_{hk} \to a_{hk}$ per ogni h e ogni k. Ciò equivale a dire che $|a^{(i)}_{hk} - a_{hk}| \to 0$ per ogni h e ogni k, e in definitiva che $\|A_i - A\| \to 0$. Diremo che $\{A_i\}$ è una successione di Cauchy se, scelto comunque $\varepsilon > 0$, esiste un intero i_0 tale che, per ogni scelta di $i, j \geq i_0$, si abbia che $\|A_i - A_j\| < \varepsilon$. Ciò equivale a dire che $\{a^{(i)}_{hk}\}$ è una successione di Cauchy per ogni scelta di h e k. Dunque, se $\{A_i\}$ è di Cauchy, per ogni h e ogni k vi è $a_{hk} \in K$ tale che $a^{(i)}_{hk} \to a_{hk}$. Ciò significa che $A_i \to A$, dove $A = (a_{hk})$.

Sia ora A una matrice $n \times n$ a elementi in K. Poniamo

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \cdots$$

Il significato di questa scrittura è che la successione delle somme parziali

$$B_h = \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{i!} A^i$$

è di Cauchy e $\exp(A)$ è il suo limite. Per mostrare che $\{B_h\}$ è di Cauchy basta notare che se $h \geq k$ allora, in virtù di (10.1),

$$\|B_h - B_k\| = \|\sum_{i=k+1}^{h} \frac{1}{i!} A^i\| \leq \sum_{i=k+1}^{h} \frac{n^{i-1}}{i!} \|A\|^i\,,$$

e che il lato destro di questa catena di disuguaglianze è maggiorato da

$$2^{-k-1} + 2^{-k-2} + \cdots + 2^{-h} = 2^{-k-1}(1 + 2^{-1} + \cdots + 2^{-h+k+1}) < 2^{-k}$$

non appena

$$n^k (2\|A\|)^{k+1} \leq (k+1)!\,.$$

Supponiamo che A sia una matrice $n \times n$ diagonalizzabile, cioè che

$$A = U \Delta U^{-1}\,,$$

dove

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & \\ & 0 & \lambda_3 & \dots & \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ & \dots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dato che, per ogni intero non negativo i,

$$A^i = U \Delta^i U^{-1}\,,$$

e che

$$\Delta^i = \begin{pmatrix} \lambda_1^i & 0 & & \dots & \\ 0 & \lambda_2^i & 0 & \dots & \\ & 0 & \lambda_3^i & \dots & \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ & \dots & & 0 & \lambda_n^i \end{pmatrix},$$

dalla definizione di esponenziale di una matrice si ricava che

$$\exp(A) = U \exp(\Delta) U^{-1} = U \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & & \dots & \\ 0 & \exp(\lambda_2) & 0 & \dots & \\ & 0 & \exp(\lambda_3) & \dots & \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ & \dots & & 0 & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix} U^{-1}\,.$$

Supponiamo ora che A sia antihermitiana, cioè che ${}^tA = -\overline{A}$. Possiamo dunque scrivere $A = U\Delta U^{-1}$, dove U è unitaria e Δ è una matrice diagonale puramente immaginaria. La matrice $\exp(\Delta)$ è una matrice diagonale con numeri complessi di modulo 1 sulla diagonale. Ne segue che $\exp(A)$ è unitaria. Se invece A è hermitiana possiamo scrivere $A = U\Delta U^{-1}$, dove U è unitaria e Δ è una matrice diagonale reale. Allora $\exp(\Delta)$ è una matrice diagonale con numeri reali positivi sulla diagonale, e quindi $\exp(A)$ è hermitiana definita positiva.

Siano A e B due matrici complesse $n \times n$ che commutano. Mostriamo, per induzione su i, che

$$(A+B)^i = \sum_{\substack{j+h=i\\ j,h\geq 0}} \binom{i}{j} A^j B^h \,. \tag{10.2}$$

Per $i = 1$ non vi è nulla da dimostrare. Altrimenti

$$\begin{aligned}
(A+B)^i &= (A+B) \sum_{\substack{j+h=i-1\\ j,h\geq 0}} \binom{i-1}{j} A^j B^h \\
&= \sum_{\substack{j+h=i-1\\ j,h\geq 0}} \binom{i-1}{j} A^{j+1} B^h + \sum_{\substack{j+h=i-1\\ j,h\geq 0}} \binom{i-1}{j} A^j B^{h+1} \\
&= \sum_{\substack{j+h=i\\ j,h\geq 0}} \left(\binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j} \right) A^j B^h \\
&= \sum_{\substack{j+h=i\\ j,h\geq 0}} \binom{i}{j} A^j B^h \,.
\end{aligned}$$

Da quanto si è appena dimostrato si ricava che

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(A+B)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \sum_{\substack{j+h=i\\ j,h\geq 0}} \binom{i}{j} A^j B^h = \sum_{\substack{j+h\leq k\\ j,h\geq 0}} \frac{1}{j!h!} A^j B^h = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A^j \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} B^h \,.$$

Passando al limite per $k \to \infty$ ne otteniamo

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \,. \tag{10.3}$$

Osserviamo che (10.2) e (10.3) non sono sempre valide se A e B non commutano. Un esempio è dato da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In effetti

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad & A^2 + 2AB + B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\exp(A+B) &= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad & \exp(A)\exp(B) &= \begin{pmatrix} e & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$