Linearità delle isometrie di $\mathbb{R}^n$

Maurizio Cornalba

12/10/2012

Dati due punti $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ indichiamo con

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

il loro prodotto scalare euclideo e con $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ la norma euclidea di $\mathbf{x}$. Una applicazione biunivoca $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice una *isometria* se

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposizione 1. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometria tale che $f(0) = 0$. Allora f è lineare.*

La dimostrazione avverrà in vari passi, il primo dei quali è il seguente.

Lemma 1. *Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ sono allineati allora anche $f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z})$ sono allineati. Di conseguenza se r è una retta in $\mathbb{R}^n$ anche $f(r)$ è una retta.*

Dimostrazione. Se due o più tra i punti $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ coincidono non c'è niente da dimostrare. Supponiamo quindi che $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ siano distinti. Senza perdere in generalità possiamo anche supporre che $\mathbf{y}$ stia tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$. Ne segue che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$$

e quindi che

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| + \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})\|,$$

o anche, ponendo $\mathbf{v} = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$, $\mathbf{w} = f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})$, che

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|.$$

Quadrando i due lati di questa uguaglianza si ottiene che

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$$

il che, per la disuguaglianza di Schwarz, implica che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono proporzionali. Questo significa che $f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{y})$ e $f(\mathbf{z})$ sono allineati. Sia ora r una retta in $\mathbb{R}^n$. La prima parte del lemma implica che $f(r)$ è contenuto in una retta ℓ. D'altra parte anche f^{-1} è una isometria, e dunque $f^{-1}(\ell)$ è contenuto in una retta r'. Ma allora $r \subset f^{-1}(\ell) \subset r'$, quindi $r = r' = f^{-1}(\ell)$ e $f(r) = f(f^{-1}(\ell)) = \ell$ perché f è suriettiva. $\square$

Lemma 2. *Se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{R}^n$ sono complanari allora anche $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), f(\mathbf{x}_3), f(\mathbf{x}_4)$ sono complanari. Di conseguenza se π è un piano in $\mathbb{R}^n$ anche $f(\pi)$ è un piano.*

Dimostrazione. Se tre fra i punti in questione sono allineati non c'è niente da dimostrare, in virtù del lemma 1. Supponiamo quindi che $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$ siano a tre a tre non allineati; sia π il piano che li contiene. Se la retta contenente $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ e quella contenente $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$ non si incontrano e lo stesso è vero per la retta contenente $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_3$ e quella contenente $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_4$, allora queste quattro rette formano un parallelogramma, e salvo rinumerare i quattro punti possiamo supporre che $\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$

e $\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$. Notiamo anche che questi due vettori sono indipendenti dato che i quattro punti non sono allineati. Ma allora

$$\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1 = (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

e

$$\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

sono linearmente indipendenti, e quindi la retta congiungente $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_4$ interseca quella congiungente $\mathbf{x}_2$ a $\mathbf{x}_3$. In ogni caso vi sono due tra i punti $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$ tali che la retta r che li congiunge interseca la retta s congiungente gli altri due. Quindi $f(r)$ e $f(s)$ sono due rette che si intersecano e sono perciò contenute in un piano. Ne segue che $f(\mathbf{x}_1)$, $f(\mathbf{x}_2)$, $f(\mathbf{x}_3)$ e $f(\mathbf{x}_4)$ sono complanari. La seconda affermazione del lemma si dimostra come la corrispondente affermazione del lemma 1. $\square$

Lemma 3. *Se L è un sottospazio vettoriale unidimensionale di $\mathbb{R}^n$ la restrizione di f a L è lineare.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}$ un elemento di L e sia k un numero reale. Se $\mathbf{x} = 0$ o $k = 0$ allora $f(k\mathbf{x}) = f(0) = 0 = kf(\mathbf{x})$. Supponiamo ora che $\mathbf{x}$ e k non siano nulli. Notiamo che $\|k\mathbf{x}-\mathbf{x}\|$ è pari a $\big|1-|k|\big|$ quando $k > 0$ e a $\big|1+|k|\big|$ quando $k < 0$. Quindi il segno di k è positivo o negativo a seconda che $\|k\mathbf{x} - \mathbf{x}\|$ sia minore o maggiore di $\max(1, |k|)$. Per il lemma 1 i tre punti 0, $f(\mathbf{x})$ e $f(k\mathbf{x})$ sono allineati. Inoltre $\|f(k\mathbf{x})\| = \|k\mathbf{x}\| = |k|\|\mathbf{x}\|$, quindi $f(k\mathbf{x}) = \pm kf(\mathbf{x})$. Però $\|f(k\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\| = \|k\mathbf{x} - \mathbf{x}\|$, e quindi deve necessariamente essere $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$. Sia ora $\mathbf{y}$ un altro punto di L. Mostriamo che $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$. Se $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$ non c'è niente da dimostrare. Se invece uno dei due vettori, ad esempio $\mathbf{x}$, non è nullo, $\mathbf{y} = k\mathbf{x}$ per qualche numero reale k. Ma allora, per quanto appena dimostrato, $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f((1+k)\mathbf{x}) = (1+k)f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})+kf(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$. $\square$

Possiamo ora concludere la dimostrazione della proposizione 1. Segue dal lemma 3 che $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $k \in \mathbb{R}$. Resta da mostrare che $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ per ogni scelta di $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente dipendenti questo segue ancora dal lemma 3. Supponiamo invece che $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ non siano linearmente dipendenti, cioè che la retta che li congiunge non passi per l'origine. Indichiamo con r' la retta passante per 0 e $\mathbf{x}$ e con r la parallela a r' passante per $\mathbf{y}$. Indichiamo poi con s' la retta passante per 0 e $\mathbf{y}$ e con s la parallela a s' passante per $\mathbf{x}$. Per la regola del parallelogramma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è il punto di intersezione tra r e s. In virtù dei lemmi 1 e 2, $f(r')$ e $f(r)$ sono rette complanari; dato che non si incontrano sono parallele. Lo stesso si può dire di $f(s')$ e $f(s)$. Quindi il punto di intersezione di $f(r)$ e $f(s)$ è $f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, sempre per la regola del parallelogramma. Va osservato a questo proposito che il lemma 1 implica che i punti 0, $f(\mathbf{x})$ e $f(\mathbf{y})$ non sono allineati. D'altra parte il punto di intersezione di $f(r)$ e $f(s)$ è l'immagine tramite f del punto di intersezione di r e s, e quindi è uguale a $f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$.