Complementi sugli Spazi Metrici

Maurizio Cornalba
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
10/11/2005 (revisione 15/5/2015)

Scopo di queste note è quello di integrare in parte il testo di C. Kosniowski: *Introduzione alla topologia algebrica* con alcune nozioni aggiuntive sugli spazi metrici e relativi esercizi. Si è cercato, per quanto possibile, di attenersi alle notazioni e convenzioni del libro di Kosniowski. Una differenza che va segnalata è che la palla di centro p e raggio ε viene indicata con $B(p, \varepsilon)$ anziché con $B_\varepsilon(p)$.

1 Distanza tra sottoinsiemi

In uno spazio metrico (X, d) consideriamo un sottoinsieme non vuoto E e un punto x di X. Si definisce *distanza* tra E e x, e si indica con $d(x, E)$ (o $d(E, x)$), il numero non negativo

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y)\,.$$

Dato un altro sottoinsieme non vuoto F di X, si definisce *distanza* tra E e F, e si indica con $d(E, F)$, il numero non negativo

$$d(E, F) = \inf_{x \in E} d(x, F) = \inf_{x \in E,\ y \in F} d(x, y)\,. \tag{1.1}$$

È chiaro che la distanza tra sottoinsiemi di X gode della proprietà simmetrica, cioè che $d(E, F) = d(F, E)$.

È possibile descrivere la chiusura di un sottoinsieme E di X in termini di distanza. Infatti, se x è un punto di X, dico che la distanza tra x e E è nulla se e solo se x appartiene alla chiusura di E. In effetti, se $x \in \overline{E}$, per ogni $\varepsilon > 0$ il disco $B(x, \varepsilon)$ interseca E, e quindi vi è in E almeno un punto y tale che $d(x, y) < \varepsilon$. Ciò significa che $d(x, E) < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi che $d(x, E) = 0$. Viceversa, se $d(x, E) = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ vi è un punto y di E tale che $d(x, y) < \varepsilon$, cioè $B(x, \varepsilon)$ interseca E; poiché i dischi di centro x costituiscono un sistema fondamentale di intorni di x, questo significa che x appartiene alla chiusura di E. Un corollario di quanto abbiamo appena detto è che un punto di X appartiene a un chiuso non vuoto E se e solo se ha da E distanza nulla; o anche che un punto esterno a un chiuso non vuoto E ha distanza strettamente positiva da E.

Una osservazione importante è che, fissato comunque un sottoinsieme non vuoto G di X, la funzione $x \mapsto d(x, G)$ è continua, anzi addirittura Lipschitziana di costante 1. Ricordiamo a questo proposito che una funzione $f : X \to Y$ tra spazi metrici (X, d) e (Y, d') si dice *Lipschitziana* di costante k se per ogni coppia di punti x, y di X si ha che

$$d'(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)\,.$$

La Lipschitzianità di $x \mapsto d(x, G)$ segue immediatamente dalla disuguaglianza triangolare. Questa implica infatti che

$$d(x, G) \leq d(x, y) + d(y, G)\ , \quad d(y, G) \leq d(x, y) + d(x, G)\,,$$

cioè che

$$|d(x, G) - d(y, G)| \leq d(x, y)\,.$$

Che una funzione f Lipschitziana di costante k sia continua segue dal fatto che per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni punto x di X si ha che

$$f(B(x, \varepsilon/k)) \subset B(f(x), \varepsilon) .$$

Siano ora E ed F due sottoinsiemi disgiunti e non vuoti di X. Anche se E ed F sono chiusi, è possibile che essi abbiano distanza nulla. Un esempio si ottiene prendendo per E l'asse delle x nel piano cartesiano e come F un ramo dell'iperbole di equazione $xy = 1$ (figura 1). Se però sappiamo anche che uno tra E ed F (E, per fissare le idee) è compatto, possiamo senz'altro dire che la distanza tra E ed F è strettamente positiva. Per vedere ciò possiamo ragionare come segue. Poiché E è compatto la funzione $x \mapsto d(x, F)$ ha minimo su E. Se y è un punto in cui questo minimo è raggiunto, la distanza tra E ed F è pari a quella tra y ed F, che è strettamente positiva perchè F è chiuso e y non gli appartiene.

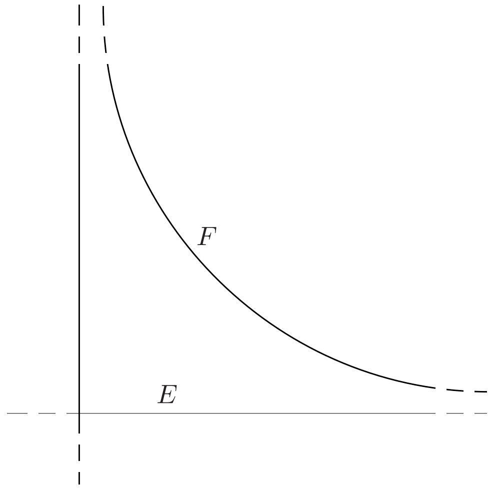

Figura 1. Due chiusi disgiunti con distanza nulla.

Esercizi

1.1 Dimostrare l'uguaglianza di destra in (1.1).

2 Successioni

Sia X uno spazio topologico, e sia $\{x_n\}$ una successione di punti di X. Diremo che la successione in questione *converge* a un elemento x di X, o anche che x è *limite* di $\{x_n\}$ se, per ogni intorno A di x, x_n appartiene ad A per ogni n sufficientemente grande (o, come si dice, definitivamente); più esattamente (e in modo più pedante) se, per ogni intorno A di x, esiste un intero n_0 tale che $x_n \in A$ per ogni $n \geq n_0$. Per indicare che $\{x_n\}$ converge a x si scrive a volte

$$x_n \to x .$$

Segue immediatamente dalla definizione che, se $f : X \to Y$ è una funzione continua e $x_n \to x$, allora $f(x_n) \to f(x)$. Dato infatti un intorno B di $f(x)$ esiste, poiché f è continua, un intorno A di x tale che $f(A) \subset B$; ma allora, per n abbastanza grande, $x_n \in A$, e quindi $f(x_n) \in B$.

È immediato che, se lo spazio topologico X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, o più in generale di $\mathbb{R}^n$, con la topologia euclidea, la nozione di convergenza ora data coincide con quella usuale.

Osserviamo anche che, se la successione $\{x_n\}$ converge a x, lo stesso accade per ogni sua sottosuccessione.

Esempio importante 2.1. Una successione può convergere a più elementi diversi di X. Un esempio è fornito dal seguente spazio topologico (possiamo chiamarlo intervallo bicipite?). Sia $Y = [0,1] \cup [2,3]$, con la topologia euclidea, e consideriamo la relazione di equivalenza su Y

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x = y \text{ oppure } |x-y| = 2, x \neq 0, y \neq 0\,.$$

In parole povere, due punti diversi di Y sono equivalenti solo se uno dei due è uguale all'altro più 2, purché i due punti non siano 0 e 2. Quindi 0 e 2 sono equivalenti solo a se stessi, $1/2$ è equivalente a se stesso e a $5/2$, $1/7$ a se stesso e a $15/7$, e così via. Prendiamo come spazio topologico X il quoziente $Y/\sim$; indicheremo con p l'immagine in X di 0, e con q l'immagine di 2. Consideriamo ora in X la successione $\{x_n\}$ così definita:

$$x_n = \text{classe di equivalenza di } \frac{1}{n} = \text{classe di equivalenza di } 2 + \frac{1}{n}\,.$$

Poiché $1/n \to 0$ e l'applicazione "passaggio al quoziente" da Y a X è continua $\{x_n\}$ converge a p. Analogamente, poiché $(2 + 1/n) \to 2$, $\{x_n\}$ converge anche a q.

Cosa è "andato storto" nell'esempio precedente? La risposta è che lo spazio X considerato non è di Hausdorff. Infatti, se U è un intorno di p, e indichiamo con $\pi : Y \to X$ la proiezione naturale, $\pi^{-1}(U)$ deve contenere un intervallo della forma $[0,a)$, e quindi anche uno della forma $(2, 2+a)$. Discorso analogo, ma con i ruoli di 0 e 2 invertiti, vale per un intorno V di q. Dunque U e V non sono disgiunti perchè non possono esserlo $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$. In spazi di Hausdorff si ha invece "unicità del limite".

Proposizione 2.2. *Se X è uno spazio di Hausdorff ogni successione in X converge, al più, ad un solo punto di X.*

La proposizione dice che, se $x_n \to x$ e $x_n \to y$, allora $x = y$. Per dimostrarla basta osservare che, se U è un intorno di x e V uno di y, per n abbastanza grande x_n appartiene sia a U che a V, che non sono perciò disgiunti. Poiché X è di Hausdorff, x e y devono coincidere (se no si potrebbero prendere U e V disgiunti).

D'ora in poi lavoreremo, salvo avviso contrario, esclusivamente con spazi metrici. Sia dunque (X,d) un tale spazio. Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di X. Supponiamo che $\{x_n\}$ converga a x. Poiché la funzione $y \mapsto d(y,x)$ è continua, la successione $\{d(x_n,x)\}$ converge a $d(x,x) = 0$. Viceversa, supponiamo che $\{d(x_n,x)\}$ converga a 0. Dato un intorno A di x, questo contiene un disco $B\,(x,\varepsilon)$; d'altra parte, per $n \geq n_0$, $d(x_n,x) < \varepsilon$, quindi $x_n \in A$. in definitiva si può dire che, in uno spazio metrico

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; d(x_n,x) \to 0\,.$$

La chiusura di un sottoinsieme E di uno spazio metrico (X,d) può essere caratterizzata in termini di successioni. Vale infatti la:

Proposizione 2.3. *Un punto x di X appartiene alla chiusura di E se e solo se vi è una successione di punti di E che converge a x.*

Per dimostrare la proposizione basta ragionare come segue. In primo luogo, se $x \in \overline{E}$, per ogni intero n il disco $B(x, 1/n)$ interseca E; scegliamo un punto x_n nell'intersezione. La successione $\{x_n\}$ converge a x poiché $d(x_n, x) < 1/n$. Viceversa, se $\{x_n\}$ è una successione di punti di E che converge a x, ogni intorno di x contiene punti di $\{x_n\}$, e quindi di E.

Abbiamo notato nella sezione 1 che, se $f : X \to Y$ è una applicazione continua tra spazi topologici e $\{x_n\}$ una successione convergente a x in X, allora $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$. Se X è uno spazio metrico vale anche il viceversa, e precisamente il

Teorema 2.4. *Siano X uno spazio metrico, Y uno spazio topologico e $f : X \to Y$ una applicazione. Sono condizioni equivalenti:*
i) f è continua.
ii) Per ogni successione $\{x_n\}$ in X, se $\{x_n\}$ converge a x allora $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$.

Abbiamo già osservato che *i)* implica *ii)*. Basta quindi mostrare il viceversa. Supponiamo dunque che f non sia continua in un punto x. Vi è un intorno A di $f(x)$ tale che, per ogni intorno B di x, $f(B) \not\subset A$. Prendendo $B = B(x, 1/n)$, concludiamo che vi è un punto x_n tale che $d(x_n, x) < 1/n$ ma $f(x_n) \notin A$. Ne segue che la successione $\{x_n\}$ converge a x ma $\{f(x_n)\}$ non converge a $f(x)$.

Osservazione importante 2.5. Il teorema 2.4 è falso se non si suppone che X sia uno spazio metrico, ma solo uno spazio topologico. I controesempi non sono però del tutto elementari e qui non ne daremo.

Esercizi

2.1 Si mostri che, se X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, munito della topologia euclidea, la nozione di convergenza data in questa sezione coincide con quella usuale.

2.2 Siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ successioni negli spazi topologici X e Y. Si mostri che, se $\{x_n\}$ converge a x e $\{y_n\}$ a y, allora $\{(x_n, y_n)\}$ converge a (x, y) in $X \times Y$.

3 Completezza

Sia (X, d) uno spazio metrico. Se la successione $\{x_n\}$ converge a x, per ogni $\varepsilon > 0$ vi è un intero n_0 tale che, per $n \geq n_0$, la distanza tra x_n e x è inferiore a $\varepsilon/2$. La disuguaglianza triangolare dice allora che:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon \quad \text{se } n, m \geq n_0\,.$$

La successione $\{x_n\}$ è dunque, come si suol dire, una successione di Cauchy. Formalmente, una successione $\{y_n\}$ di punti di X si dice *di Cauchy* se

$$d(y_n, y_m) \to 0 \quad \text{per } n, m \to \infty\,,$$

cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero n_0 tale che, per $n, m \geq n_0$, si abbia che $d(y_n, y_m) < \varepsilon$. Quanto abbiamo osservato è che, in uno spazio metrico, ogni successione convergente è di Cauchy.

Viceversa, diremo che lo spazio metrico (X, d) è *completo* se ogni successione di Cauchy in X è convergente. Il fatto stesso che abbiamo sprecato un termine specifico, completezza, per indicare ciò, fa sospettare che non tutti gli spazi metrici siano completi.

Esempi 3.1. a) $\mathbb{R}$, con la metrica euclidea, è completo.

b) $\mathbb{Q}$, con la metrica euclidea, non è completo. Per esempio, la successione 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421,..., ottenuta troncando sempre più a destra lo sviluppo decimale di $\sqrt{2}$, è di Cauchy perchè converge, in $\mathbb{R}$, a $\sqrt{2}$, ma non può convergere in $\mathbb{Q}$ perchè $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e per l'unicità del limite in $\mathbb{R}$.

c) Un intervallo aperto con la metrica euclidea ($(0,1)$, per fissare le idee) non è completo. Infatti la successione $\{1/n\}$ converge a 0 in $\mathbb{R}$, ed è quindi di Cauchy, ma non converge ad alcun punto di $(0,1)$, sempre per l'unicità del limite. Questo esempio è importante perchè mostra che la completezza non è una nozione topologica, ma solo metrica, nel senso che possono esservi spazi metrici omeomorfi, come $\mathbb{R}$ e $(0,1)$, uno dei quali è completo e l'altro no. Ciò non significa, peraltro, che il fatto che uno spazio metrico X sia completo non abbia implicazioni di carattere puramente topologico su X. Una conseguenza topologica particolarmente importante della completezza, il teorema di Baire, sarà illustrata nella sezione 7 di queste note.

Spazi metrici completi in abbondanza sono forniti da

Proposizione 3.2. *Se X è uno spazio metrico completo un sottospazio di X, con la metrica indotta, è completo se e solo se è chiuso. Se X e Y sono spazi metrici completi il prodotto $X \times Y$, con la metrica*

$$d((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')\,,$$

è completo.

Dimostriamo la prima parte della proposizione. Supponiamo che $E \subset X$ sia chiuso, e sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in E. Poiché X è completo, $\{x_n\}$ converge a un punto di X, il quale deve appartenere a E per la caratterizzazione della chiusura mediante le successioni (proposizione 2.3). Viceversa, supponiamo E completo, e sia x un punto della chiusura di E. Vi è in E una successione che converge ad x. Questa successione è di Cauchy e quindi converge a un punto di E. Per l'unicità del limite, questo punto non può essere che x. Perciò $\overline{E} \subset E$, come si voleva.

Quanto all'affermazione sul prodotto, se $\{(x_n, y_n)\}$ è una successione di Cauchy in $X \times Y$, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono di Cauchy, e quindi convergono a punti $x \in X$ e $y \in Y$. Ma allora $\{(x_n, y_n)\}$ converge a (x,y).

Esercizi

3.1 Sia X un insieme, e siano d, d' metriche equivalenti su X, nel senso che vi sono costanti positive N e M tali che

$$d(x,y) \leq Nd'(x,y)\,; \quad d'(x,y) \leq Md(x,y)$$

per ogni x e ogni y. Si mostri che una successione in X è di Cauchy rispetto alla metrica d se e solo se lo è rispetto a d'. Se ne deduca che (X,d) è completo se e solo se (X,d') lo è.

3.2 Sia $f : X \to Y$ un applicazione Lipschitziana tra spazi metrici. Si mostri che, se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X, anche $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy. Si mostri con un esempio che la tesi non vale se si suppone solo che f sia continua.

3.3 Sia X uno spazio metrico, e sia $f : X \to X$ una applicazione Lipschitziana di costante $k < 1$. Si mostri che f ha al più un punto fisso (un punto x di X si dice *fisso* per f se $f(x) = x$).

3.4 Sia X uno spazio metrico completo, e sia $f : X \to X$ una applicazione Lipschitziana di costante $k < 1$. Si mostri che f ha un punto fisso (suggerimento: si consideri la successione x, $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, $\ldots$, dove x è un punto qualsiasi di X).

3.5 Siano X e Y sottospazi completi di uno stesso spazio metrico. Si mostri che anche $X \cup Y$ è completo.

3.6 Siano X e Y sottospazi di uno stesso spazio metrico. Si mostri che, se X è completo e Y chiuso, anche $X \cap Y$ è completo.

4 Spazi di funzioni

Sia X un insieme e sia Y uno spazio metrico. Indichiamo con $F(X, Y)$ l'insieme delle applicazioni da X in Y. Per ogni $f \in F(X, Y)$ e ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$N(f, \varepsilon) = \left\{ g \in F(X, Y) : \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) < \varepsilon \right\} .$$

L'insieme di tutti gli $N(f, \varepsilon)$ è la base di una topologia su $F(X, Y)$, che prende il nome di *topologia della convergenza uniforme*. È infatti chiaro che l'unione di tutti gli $N(f, \varepsilon)$ è $F(X, Y)$; se poi $h \in N(f, \varepsilon) \cap N(g, \delta)$, allora $h \in N(h, \rho) \subset N(f, \varepsilon) \cap N(g, \delta)$, dove

$$\rho = \min \left(\varepsilon - \sup_{x \in X} d(f(x), h(x)), \delta - \sup_{x \in X} d(h(x), g(x)) \right) .$$

Diremo che una successione di funzioni da X a Y *converge uniformemente* se converge nella topologia della convergenza uniforme.

La topologia della convergenza uniforme viene da una metrica su $F(X, Y)$. Fissiamo una costante positiva K e poniamo, per ogni coppia f, g di elementi di $F(X, Y)$,

$$d_K(f, g) = \min \left(\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)), K \right) .$$

Questa funzione è una distanza. È chiaro che è simmetrica e non negativa, e che $f = g$ se $d_K(f, g) = 0$. Quanto alla proprietà triangolare

$$d_K(f, g) \leq d_K(f, h) + d_K(h, g) ,$$

questa è chiaramente valida quando uno dei due addendi di destra vale K. Altrimenti

$$\begin{aligned} d_K(f, g) &\leq \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \leq \sup_{x \in X} (d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x))) \\ &\leq \sup_{x \in X} d(f(x), h(x)) + \sup_{x \in X} d(h(x), g(x)) = d_K(f, h) + d_K(h, g) . \end{aligned}$$

Notiamo poi che, se $\varepsilon < K$, la palla $B(f, \varepsilon)$ non è altro che l'insieme $N(f, \varepsilon)$, e inoltre che l'insieme degli $N(f, \varepsilon)$ con $\varepsilon < K$ costituisce una base per la topologia della convergenza uniforme su $F(X, Y)$; questa topologia è dunque indotta dalla metrica d_K appena introdotta. È importante notare che non solo la topologia che si ottiene è indipendente dalla scelta della costante K, ma lo è altresì la nozione di successione di Cauchy in $F(X, Y)$.

Indichiamo con $L(X,Y)$ l'insieme di tutte le funzioni limitate da X in Y, di tutte le funzioni cioè tali che $\sup_{x,x'\in X} d(f(x),f(x')) < +\infty$. Se $f,g \in L(X,Y)$, si ha che

$$\begin{aligned} d(f(x),g(x)) &\leq d(f(x),f(x_0)) + d(f(x_0),g(x_0)) + d(g(x_0),g(x)) \\ &\leq d(f(x_0),g(x_0)) + \sup_{z,w\in X} d(f(z),f(w)) + \sup_{z,w\in X} d(g(z),g(w)) \,, \end{aligned}$$

dove x_0 è un punto di X, fissato una volta per tutte. La funzione $x \mapsto d(f(x),g(x))$ è dunque limitata, e

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$$

è un numero reale. Ragionando come per d_K si mostra facilmente che d è una distanza su $L(X,Y)$. Per $\varepsilon < K$ le palle di raggio ε rispetto alla distanza d coincidono con quelle dello stesso raggio rispetto a d_K. Ciò mostra che la topologia data da d su $L(X,Y)$ non è altro che la topologia indotta dalla topologia della convergenza uniforme su $F(X,Y)$, e inoltre che la nozione di successione di Cauchy nella metrica d coincide con quella di successione di Cauchy nella metrica d_K.

Lemma 4.1. *$L(X,Y)$ è chiuso in $F(X,Y)$.*

Per dimostrare questa affermazione, consideriamo una successione $\{f_n\}$ di elementi di $L(X,Y)$ che converga in $F(X,Y)$ a f. Si vuole mostrare che anche f è una funzione limitata. Se n è abbastanza grande, $d_K(f_n,f) < K$, cioè $\sup_{x\in X} d(f_n(x),f(x)) < K$. Ora, per ogni coppia di punti $x,x' \in X$,

$$\begin{aligned} d(f(x),f(x')) &\leq d(f(x),f_n(x)) + d(f_n(x),f_n(x')) + d(f_n(x'),f(x')) \\ &\leq 2K + \sup_{z,w\in X} d(f_n(z),f_n(w)) < +\infty \,, \end{aligned}$$

e dunque f è limitata, come si voleva dimostrare.

Proposizione 4.2. *Se Y è uno spazio metrico completo, anche $F(X,Y)$ e $L(X,Y)$ sono completi.*

In virtù del lemma 4.1 basta dimostrare la completezza di $F(X,Y)$. Sia dunque $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $F(X,Y)$. Se n e m sono sufficientemente grandi $d_K(f_n,f_m) = \sup_{x\in X} d(f_n(x),f_m(x))$, e quindi per ogni fissato $x \in X$ si ha che

$$d(f_n(x),f_m(x)) \leq d_K(f_n,f_m) \,.$$

Ne segue in particolare che $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy per ogni x e quindi, per la completezza di Y, ha un limite, che indicheremo con $f(x)$. Vogliamo ora mostrare che la successione $\{f_n\}$ converge a f. Fissato comunque un numero positivo $\varepsilon < K$, vi è un n_0 tale che, per $n,m > n_0$, $d_K(f_n,f_m) < \varepsilon$, e quindi in particolare $d(f_n(x),f_m(x)) < \varepsilon$ per ogni $x \in X$. Passando al limite per $m \to \infty$ se ne deduce che

$$d(f_n(x),f(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_n(x),f_m(x)) \leq \varepsilon$$

per ogni $x \in X$, e quindi che $d_K(f_n,f) \leq \varepsilon$. Ciò mostra che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, e completa la dimostrazione.

Osservazione 4.3. È vero anche il viceversa di quanto affermato dalla proposizione 4.2, e cioè che, se $F(X,Y)$ o $L(X,Y)$ è completo, anche Y è completo. Infatti, se $\{y_n\}$ è una successione di Cauchy in Y, e indichiamo con f_n la funzione costante che vale y_n, anche $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $L(X,Y)$, che viste le ipotesi converge a una funzione f. Questa funzione non può che essere costante, e il suo valore è il limite di $\{y_n\}$.

Supponiamo ora che anche X sia uno spazio metrico, e indichiamo con $C(X,Y)$ l'insieme di tutte le applicazioni *continue* da X in Y. Poniamo anche $LC(X,Y) = C(X,Y) \cap L(X,Y)$.

Proposizione 4.4. *$C(X,Y)$ è chiuso in $F(X,Y)$. In particolare se Y è completo anche $C(X,Y)$ è completo.*

Bisogna mostrare che, se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni continue da X a Y che converge uniformemente a $f \in F(X,Y)$, allora anche f è continua. Sia dunque x un punto di X, e sia $\varepsilon < K$ un numero positivo. Se n è sufficientemente grande $\sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) = d_K(f_n, f) < \varepsilon/3$. Inoltre, fissato n, vi è un $\delta > 0$ tale che, se $d(x,x') < \delta$, allora $d(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon/3$. Ne segue che, se $d(x,x') < \delta$, allora

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x')) + d(f_n(x'), f(x')) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Questo mostra che f è continua, come si voleva.

5 Completamento di uno spazio metrico

Richiamiamo innanzitutto le nozioni di applicazione isometrica e di isometria. Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi metrici si dice *isometrica* se, per ogni coppia di punti x, y di X, si ha che $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$. Si dice che f è una *isometria* se, oltre ad essere isometrica, è anche suriettiva. Una applicazione isometrica è ovviamente continua (è Lipschitziana) e iniettiva: infatti, da $f(x) = f(y)$ segue che $d(x,y) = d(f(x), f(y)) = 0$, e quindi che $x = y$. Ne segue che una isometria f è biunivoca; è chiaro che anche f^{-1} è isometrica. Quindi una isometria è un omeomorfismo.

Come si è visto, non tutti gli spazi metrici sono completi. È naturale però cercare di "immergere", nel modo più "economico" possibile, uno spazio metrico (X,d) in uno completo, cercare cioè uno spazio metrico che giuochi, rispetto a X, lo stesso ruolo che $\mathbb{R}$ ha nei confronti di $\mathbb{Q}$. Più esattamente si cercano uno spazio metrico Y e una applicazione $j : X \to Y$ che godano delle seguenti proprietà:

i) Y è completo,
ii) $j(X)$ è denso in Y,
iii) j è isometrica.

Se valgono queste tre proprietà si dice che (Y, j) (o, più semplicemente, Y) è un *completamento* di X.

Proposizione 5.1 (unicità del completamento)**.** *Siano $j : X \to Y$ e $j' : X \to Y'$ due completamenti. Vi è una e una sola applicazione continua $h : Y \to Y'$ tale che $h \circ j = j'$. Inoltre h è una isometria.*

L'unicità di h è conseguenza del seguente risultato più generale.

Lemma 5.2. *Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni continue dallo spazio topologico X nello spazio di Hausdorff Y. Se vi è un sottoinsieme denso $E \subset X$ tale che le restrizioni di f e g ad E coincidano, allora $f = g$.*

Dimostriamo il lemma. Se x è un punto di X e A e B sono intorni di $f(x)$ e $g(x)$, $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$ è un intorno non vuoto di x, e quindi interseca E. Perciò, se e è un punto comune a $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$ e ad E, $f(e) = g(e)$ appartiene sia ad A che a B. Ne segue che $f(x)$ e $g(x)$ non hanno intorni disgiunti; poiché Y è di Hausdorff, $f(x) = g(x)$.

Torniamo alla dimostrazione della proposizione 5.1, e precisamente a quella dell'esistenza di h. Sia y un punto di Y; poiché $j(X)$ è denso in Y, vi è una successione $\{x_n\}$ di punti di X tale che $j(x_n) \to y$. La successione $\{j(x_n)\}$ è quindi di Cauchy e, poiché j e j' sono isometriche, lo stesso si può dire di $\{x_n\}$ e di $\{j'(x_n)\}$. Definiamo $h(y)$ come il limite di $\{j'(x_n)\}$, che esiste perchè Y' è completo. Mostreremo ora che h è ben definita, cioè che $h(y)$ è indipendente dalla scelta della successione $\{x_n\}$, e che h è isometrica. Sia dunque $\{x'_n\}$ un'altra successione in E tale che $\{j(x'_n)\}$ converga a y'. Siccome j e j' sono isometriche si ha che

$$d(j'(x'_n), j'(x_n)) = d(j(x'_n), j(x_n))$$

per ogni n. Passando al limite su n e usando la continuità della funzione distanza si ottiene che

$$\begin{aligned} d\left(\lim_{n\to\infty} j'(x_n), \lim_{n\to\infty} j'(x'_n)\right) &= \lim_{n\to\infty} d(j(x_n), j(x'_n)) \\ &= d\left(\lim_{n\to\infty} j(x_n), \lim_{n\to\infty} j(x'_n)\right) \\ &= d(y, y')\,. \end{aligned}$$

Se scegliamo $y' = y$ ciò mostra che h è ben definita; una volta assodato questo, e scegliendo y e y' arbitrari, l'uguaglianza mostra che h è isometrica. In particolare h è continua. Resta da dimostrare che h è suriettiva. Questa è una conseguenza formale di ciò che si è già dimostrato. Innanzitutto notiamo che, nel caso in cui $Y = Y'$ e $j = j'$, dall'unicità di h segue che h è l'identità su Y. Rovesciando poi i ruoli di Y e di Y', quanto abbiamo dimostrato mostra che vi è una applicazione continua $h' : Y' \to Y$ tale che $h' \circ j' = j$. Per quanto si è appena detto, $h \circ h'$ è l'identità su Y'; in particolare, h è suriettiva. Ciò conclude la dimostrazione della proposizione 5.1.

Teorema 5.3. *Ogni spazio metrico ha un completamento.*

La dimostrazione del teorema è elementare ma tediosa. Sia (X, d) uno spazio metrico. Indichiamo con Z l'insieme di tutte le successioni di Cauchy in X. Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono elementi di Z la disuguaglianza triangolare implica che

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)\,.$$

Poiché $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono di Cauchy il lato destro, e quindi anche quello sinistro, di questa disuguaglianza tende a 0 per $n, m \to \infty$. Ne segue che $\{d(x_n, y_n)\}$ è una successione di Cauchy. Si può quindi definire una "distanza" δ tra elementi di Z ponendo

$$\delta(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\,.$$

Questa funzione ha tutte le proprietà di una distanza, tranne che $\delta(\{x_n\}, \{y_n\})$ può essere nullo anche se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono diverse. La disuguaglianza triangolare per δ, in particolare, segue da quella per d passando al limite, per $n \to \infty$, in

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)\,.$$

La disuguaglianza triangolare implica che l'avere "distanza" zero è una relazione di equivalenza su Z, che indicheremo con $\sim$; implica altresì che, se x, y e z sono punti di Z e $\delta(x, y) = 0$, allora $\delta(x, z) = \delta(y, z)$. Perciò, se poniamo $Y = Z/\!\sim$, δ induce una vera distanza su Y, che indicheremo con la stessa lettera δ. Vi è una applicazione naturale j da X in Y, e precisamente quella che associa a $x \in X$ la classe di equivalenza della successione costante $\{x, x, x, \dots\}$. È ovvio che j è isometrica.

Quanto ora vogliamo dimostrare è che lo spazio metrico Y appena costruito, insieme a j, è un completamento di X. Cominciamo col mostrare che $j(X)$ è denso in Y. Sia dunque $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X, e indichiamo con $\mathbf{x}$ la sua classe in Y. La distanza tra $\mathbf{x}$ e $j(x_n)$ è pari a

$$\delta(\mathbf{x}, j(x_n)) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_k)\,.$$

Poiché $\{x_n\}$ è di Cauchy questa distanza tende a zero per $n \to \infty$. Mostriamo ora che Y è completo. Sia $\{\mathbf{x}_n\}$ una successione di Cauchy in Y. Per ogni n vi è un elemento y_n di X tale che

$$\delta(\mathbf{x}_n, j(y_n)) < 1/n\,.$$

La successione $\{y_n\}$ è di Cauchy. In effetti

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= \delta(j(y_n), j(y_m)) \\ &\le \delta(j(y_n), \mathbf{x}_n) + \delta(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) + \delta(\mathbf{x}_m, j(y_m)) \\ &\le \frac{1}{n} + \delta(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) + \frac{1}{m}\,, \end{aligned}$$

e i tre addendi dell'ultimo termine sono infinitesimi per $n, m \to \infty$. Indichiamo con $\mathbf{y}$ la classe di $\{y_n\}$ in Y e mostriamo che $\{\mathbf{x}_n\}$ converge a $\mathbf{y}$. Basta notare che

$$\delta(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \le \delta(\mathbf{x}_n, j(y_n)) + \delta(j(y_n), \mathbf{y}) \le \frac{1}{n} + \delta(j(y_n), \mathbf{y})\,.$$

Poiché $\{\delta(j(y_n), \mathbf{y})\}$ converge a zero, $\{\mathbf{x}_n\}$ converge a $\mathbf{y}$. La dimostrazione del teorema 5.3 è ora completa.

Esercizi

5.1 Sia $f : X \to Y$ una isometria tra spazi metrici. Si mostri che f si estende, in modo unico, a una isometria tra i completamenti di X e Y.

5.2 Siano X e Y due spazi metrici, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ i loro completamenti. Si mostri che $\overline{X} \times \overline{Y}$, con la distanza
$$d((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$$
è un completamento di $X \times Y$.

5.3 Siano X un insieme, e Y uno spazio metrico. Sia $\overline{Y}$ il completamento di Y. Si mostri che $L(X, \overline{Y})$ è il completamento di $L(X, Y)$. Se X è uno spazio metrico, si mostri che $LC(X, \overline{Y})$ non è necessariamente il completamento di $LC(X, Y)$.

6 Completezza e compattezza

Sia X uno spazio topologico. Diremo che X è *compatto per successioni* se ogni successione in X ha una sottosuccessione convergente.

Proposizione 6.1. *Ogni spazio metrico compatto è compatto per successioni.*

Per dimostrare la proposizione, consideriamo una successione $\{x_n\}$ in X, e distinguiamo due casi. Se l'insieme dei valori della successione è finito, almeno uno di questi valori deve essere ripetuto infinite volte. La nostra successione ha dunque una sottosuccessione costante. Supponiamo invece che l'insieme dei valori di $\{x_n\}$ sia infinito. Dico che esiste un punto x di X ogni cui intorno contiene infiniti valori di $\{x_n\}$. Se così non fosse, infatti, ogni punto a di X avrebbe un intorno A_a che contiene un numero finito di valori di $\{x_n\}$. Poiché X è compatto, dal ricoprimento $\{A_a\}$ si potrebbe estrarre un ricoprimento finito, e quindi si concluderebbe che l'insieme dei valori di $\{x_n\}$ è finito. Sia dunque x un punto di X ogni cui intorno contiene infiniti valori di $\{x_n\}$. Scegliamo un punto x_{n_1} in $B\,(x, 1)$. Possiamo poi scegliere un punto x_{n_2} in $B\,(x, 1/2)$ in modo che $n_2 > n_1$, un punto x_{n_3} in $B\,(x, 1/3)$ in modo che $n_3 > n_2$, e così via. La sottosuccessione $\{x_{n_i}\}$ di $\{x_n\}$ così costruita converge a x.

Vedremo poi che vale anche il viceversa della proposizione 6.1. Occupiamoci ora delle relazioni che intercorrono tra compattezza e completezza.

Proposizione 6.2. *Ogni spazio metrico compatto per successioni è completo.*

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy nello spazio metrico X, che supponiamo compatto per successioni. La successione $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione convergente. La proposizione ora segue dal

Lemma 6.3. *Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy nello spazio metrico X. Se una sottosuccessione di $\{x_n\}$ converge a $x \in X$, anche $\{x_n\}$ converge a x.*

Dimostriamo il lemma. Sia $\{x_{n_i}\}$ una sottosuccessione di $\{x_n\}$ che converge a x, e notiamo che

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_m)\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per m e i sufficientemente grandi ognuno dei due addendi di destra è minore di $\varepsilon/2$, il primo perchè $\{x_{n_i}\}$ converge a x, il secondo perchè $\{x_n\}$ è di Cauchy. Dunque $d(x, x_m) < \varepsilon$ per m sufficientemente grande, e quindi $\{x_n\}$ converge a x. Ciò dimostra il lemma e la proposizione 6.2.

Uno spazio metrico si dice *totalmente limitato* se, per ogni $\varepsilon > 0$, può essere ricoperto con un numero finito di dischi di raggio ε.

Proposizione 6.4. *Ogni spazio metrico compatto per successioni è totalmente limitato.*

Sia X uno spazio metrico compatto per successioni e fissiamo $\varepsilon > 0$. Scegliamo un punto x_1 in X. Scegliamo poi, se ne esiste qualcuno, un punto x_2 in X che disti almeno ε da x_1. Procediamo induttivamente: scelti punti $x_1, \ldots, x_n$, scegliamo un punto x_{n+1} che disti almeno ε da ognuno di essi, sempre che ciò sia possibile. Dico che questo procedimento si arresta dopo un numero finito di passi, cioè che si giunge a trovare punti $x_1, \ldots, x_h$ tali che ogni altro punto di X dista meno di ε da almeno uno di essi, tali cioè che:

$$B\,(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B\,(x_h, \varepsilon) = X\,.$$

Se così non fosse, infatti, si sarebbe costruita una successione $x_1, x_2, \ldots$ tale che la distanza tra due qualsiasi dei suoi termini è almeno ε. Questa successione, dunque, non potrebbe avere sottosuccessioni di Cauchy, e quindi, in particolare, sottosuccessioni convergenti, in contraddizione con la compattezza per successioni di X. Questo dimostra la proposizione 6.4.

Proposizione 6.5. *Ogni spazio metrico completo e totalmente limitato è compatto.*

Per dimostrare la proposizione possiamo ragionare come segue. Sia X uno spazio metrico completo e totalmente limitato. Per ogni intero positivo n vi è un numero finito di dischi di raggio $1/n$, $B_1^n, \dots, B_{k_n}^n$, che ricoprono X. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento di X; vogliamo mostrare che ha un sottoricoprimento finito. Siano x un punto di X ed A un aperto del ricoprimento contenente x. Vi è un disco $B(x, \varepsilon)$ contenuto in A. Per ogni n vi è anche un k tale che $x \in B_k^n$; se inoltre $1/n < \varepsilon/2$, $B_k^n \subset B(x, \varepsilon) \subset A$. Ne segue che i dischi B_k^n che sono contenuti in qualche elemento di $\mathcal{A}$ formano un ricoprimento di X. Questi dischi sono una infinità al più numerabile. Quindi se per ognuno di essi scegliamo un elemento di $\mathcal{A}$ che lo contiene otteniamo un sottoricoprimento di $\mathcal{A}$ che è numerabile. Possiamo dunque supporre che

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}.$$

Se $\mathcal{A}$ non ammettesse sottoricoprimenti finiti, per ogni n si potrebbe trovare un punto x_n di X tale che

$$x_n \notin A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

La successione $\{x_n\}$ non può avere sottosuccessioni convergenti. Se infatti fosse $x_{n_i} \to x$, poiché x appartiene a un elemento di $\mathcal{A}$, diciamo ad A_h, si avrebbe che x_{n_i} appartiene ad A_h definitivamente, in contraddizione con la scelta degli x_n.

Dato che X è completo, per ottenere una contraddizione, e mostrare quindi che $\mathcal{A}$ ha sottoricoprimenti finiti, basta perciò costruire una sottosuccessione di $\{x_n\}$ che sia di Cauchy. La costruzione si può effettuare come segue. Poiché i dischi B_k^1 sono in numero finito e ricoprono X, ve n'è uno che contiene infiniti termini di $\{x_n\}$. Vi è dunque una sottosuccessione $\{x_n^{(1)}\}$ di $\{x_n\}$ con la proprietà che due qualsiasi dei suoi termini distano al più 2. Ripetiamo lo stesso ragionamento con la successione $\{x_n^{(1)}\}$ e con i dischi B_k^2. Si ottiene una sottosuccessione $\{x_n^{(2)}\}$ di $\{x_n^{(1)}\}$ tale che due qualsiasi dei suoi termini distano al più 1. Procedendo induttivamente si costruiscono successioni $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$,..., $\{x_n^{(k)}\}$,... tali che ognuna è sottosuccessione della precedente e con in più la proprietà che due qualsiasi dei termini di $\{x_n^{(k)}\}$ distano tra loro al più $2/k$. Si consideri ora la successione diagonale $\{y_n\}$, dove $y_n = x_n^{(n)}$. Questa successione è una sottosuccessione di $\{x_n\}$. Inoltre, per ogni $m \geq k$, y_m è un termine di $\{x_n^{(k)}\}$. Ne segue che

$$d(y_n, y_m) \leq \frac{2}{k} \qquad \text{se } n, m \geq k\,,$$

e quindi che $\{y_n\}$ è di Cauchy. Questo conclude la dimostrazione della proposizione 6.5.

Le proposizioni 6.1, 6.2, 6.4 e 6.5 possono essere riassunte nel seguente teorema.

Teorema 6.6. *Sia X uno spazio metrico. Sono affermazioni equivalenti:*

i) X è compatto.
ii) X è compatto per successioni.
iii) X è completo e totalmente limitato.

L'equivalenza tra *i)* e *iii)* può essere vista come una generalizzazione del fatto che i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ sono i chiusi limitati. In effetti si è a suo tempo osservato che i sottoinsiemi completi di $\mathbb{R}^n$, rispetto alla metrica euclidea, sono esattamente i chiusi; inoltre ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$ è anche totalmente limitato.

In generale non è possibile, in *iii)*, sostituire le parole “totalmente limitato” con “limitato”, come potrebbe essere suggerito dall'analogia con il caso dei compatti in $\mathbb{R}^n$. Infatti, sia (X, d) uno spazio metrico completo ma non compatto. L'esercizio 6.1 qui sotto mostra che vi è su X una metrica limitata che induce la stessa topologia indotta da d. Inoltre le successioni che sono di Cauchy rispetto a questa nuova metrica sono esattamente quelle che lo sono rispetto a d; la nuova metrica è perciò completa.

Il *numero di Lebesgue* di un ricoprimento aperto di uno spazio metrico X è l'estremo superiore dell'insieme dei numeri reali ρ tali che ogni palla di raggio ρ in X è contenuta in almeno un aperto del ricoprimento; se questo insieme è vuoto diremo che il numero di Lebesgue del ricoprimento è zero.

Lemma 6.7. *Il numero di Lebesgue di ogni ricoprimento aperto di uno spazio metrico compatto è strettamente positivo.*

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, e sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un suo ricoprimento aperto. Per ogni $x \in X$ poniamo $f(x) = \sup\{r : B(x, r) \subset A_i \text{ per qualche } i \in I\}$. Il numero di Lebesgue del ricoprimento, che indichiamo con L, è l'estremo inferiore degli $f(x)$ al variare di x in X. Siano x e y punti di X, e supponiamo che $d(x, y) < f(x)$. Sia ρ un numero reale strettamente compreso tra $d(x, y)$ e $f(x)$. Segue dalla disuguaglianza triangolare che $B(y, \rho - d(x, y)) \subset B(x, \rho)$, e quindi che $f(y) \geq \rho - d(x, y)$. Facendo tendere ρ a $f(x)$ si conclude che

$$f(x) \leq f(y) + d(x, y) \tag{6.1}$$

ogni volta che $d(x, y) < f(x)$. Sia ora $\{x_n\}$ una successione in X tale che $\lim f(x_n) = L$. Passando a una sottosuccessione, possiamo supporre che $\{x_n\}$ converga a un punto x, dato che X è compatto. Segue da (6.1) che $f(x) \leq f(x_n) + d(x, x_n)$ per n abbastanza grande. Passando al limite per $n \to \infty$ se ne deduce che $f(x) \leq L$, e quindi che $L = f(x)$. Dunque il numero di Lebesgue L è strettamente positivo.

Osservazione 6.8. La funzione f definita nella dimostrazione del lemma 6.7 è continua, anzi localmente Lipschitziana di costante 1. In effetti, se y e z appartengono a $B(x, f(x)/4)$, segue da (6.1) che $f(y) \geq 3f(x)/4$. Ma allora $d(y, z) < f(x)/2 < f(y)$, e sempre dalla (6.1) si deduce che $f(y) \leq f(z) + d(z, y)$. Scambiando i ruoli di y e z si conclude che

$$|f(y) - f(z)| \leq d(y, z)$$

quando $y, z \in B(x, f(x)/4)$.

Esercizi

6.1 Sia (X, d) uno spazio metrico. Si mostri che la funzione $\min(d, 1)$ è una metrica su X e che induce la stessa topologia indotta da d. Si mostri anche che una successione $\{x_n\}$ in X è di Cauchy rispetto a d se e solo se lo è rispetto a $\min(d, 1)$.

6.2 Si mostri che uno spazio metrico totalmente limitato (e quindi, in particolare, uno spazio metrico compatto) contiene un sottoinsieme numerabile denso.

6.3 Si mostri che uno spazio metrico X è compatto se e solo se ogni funzione continua a valori reali su X è limitata.

7 Continuità uniforme

Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi metrici si dice *uniformemente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni coppia di punti x, y in X tali che $d(x, y) < \delta$ si abbia che $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. La definizione è formalmente simile a quella di continuità; la differenza è che qui si vuole un δ indipendente dai punti x e y considerati. Esempi di funzioni uniformemente continue sono forniti dalle funzioni Lipschitziane: se f è Lipschitziana di costante k si può prendere $\delta = \varepsilon/k$. Non tutte le funzioni uniformemente continue sono Lipschitziane, tuttavia. L'esempio standard è fornito dalla funzione $f(x) = \sqrt{x}$ da $[0, 1]$ in $[0, 1]$, che è uniformemente continua, come si può vedere direttamente o usando la proposizione 7.1 qui sotto, mentre non è Lipschitziana. Questo segue, per esempio, dalla osservazione che

$$\frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x}}{2x - x} = \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x}}$$

tende a $+\infty$ per x tendente a zero.

Proposizione 7.1. *Siano X e Y spazi metrici e $f : X \to Y$ una applicazione continua. Se X è compatto f è uniformemente continua.*

Una dimostrazione di questo fatto è a pagina 115 del testo di Kosniowski. Qui ne daremo una dimostrazione leggermente differente. Ragioniamo per assurdo. Se la tesi è falsa vi è un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni intero positivo n, vi sono punti x_n e y_n in X tali che

$$d(x_n, y_n) < 1/n\,, \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon\,. \tag{7.1}$$

Poiché X è compatto, passando a sottosuccessioni se necessario, si può supporre che le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergano. La prima delle (7.1) implica che convergono a uno stesso limite x, ma passando al limite nella seconda delle (7.1) si ottiene

$$\varepsilon \leq d\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)\right) = d\left(f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right), f\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)\right) = d(f(x), f(x)) = 0\,,$$

un assurdo.

Le funzioni uniformemente continue godono di una importante proprietà di estendibilità.

Proposizione 7.2. *Siano X e Y spazi metrici, e si supponga Y completo. Sia E un sottoinsieme denso di X, e sia $f : E \to Y$ una funzione uniformemente continua. Allora esiste una funzione uniformemente continua $g : X \to Y$ la cui restrizione ad E è f.*

La dimostrazione fa uso di un semplice lemma.

Lemma 7.3. *Sia $f : X \to Y$ una funzione uniformemente continua tra spazi metrici. Se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X, anche $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy.*

Dimostriamo il lemma. Sia $\varepsilon > 0$. Sappiamo che c'è δ tale che, se $d(x, y) < \delta$, allora $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Se n ed m sono sufficientemente grandi $d(x_n, x_m) < \delta$, e quindi $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

Possiamo ora dimostrare la proposizione 7.2. Siano x e y punti di X: vi sono in E successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergenti a x e y, rispettivamente. Per il lemma le successioni $\{f(x_n)\}$ e $\{f(y_n)\}$ sono di Cauchy, e quindi convergenti, visto che Y è completo. Ora

$$d\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)\right) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n))\,. \tag{7.2}$$

Dato $\varepsilon > 0$, vi è δ tale che, se $d(a,b) < \delta$, allora $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Se $x = y$, allora per n sufficientemente grande la distanza tra x_n e y_n è minore di δ, quindi da (7.2) segue che la distanza tra i limiti di $\{f(x_n)\}$ e $\{f(y_n)\}$ è al più ε. Poiché ε è arbitrario, ne segue che il limite di $\{f(x_n)\}$ dipende solo da x: indichiamo questo limite con $g(x)$. Chiaramente, se $x \in E$, $g(x) = f(x)$. Segue ora da (7.2) che, se $d(x,y) < \delta$, allora $d(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. La funzione g è dunque uniformemente continua.

La proposizione 7.2 fornisce, in un certo senso, un criterio di non uniforme continuità. In effetti la proposizione dice che se una funzione continua definita su un sottoinsieme denso di uno spazio metrico, a valori in uno spazio metrico completo, non è estendibile con continuità, essa non può essere uniformemente continua. Ad esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ non è uniformemente continua perchè non è estendibile con continuità per $x = 0$.

Esercizi

7.1 Si mostri che la funzione $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(1/x)$ non è uniformemente continua.

8 Il teorema di Baire

Teorema 8.1 (di Baire)**.** *In uno spazio metrico completo l'intersezione di una infinità numerabile di aperti densi è densa.*

Sia X uno spazio metrico completo, e siano A_2, A_3, A_4,... aperti densi in X. Basta mostrare che, per ogni aperto non vuoto A_1, l'insieme $A_1 \cap (\bigcap\{A_i \mid i \geq 2\})$ non è vuoto. Costruiremo dunque un punto x in $\bigcap\{A_i \mid i \geq 1\}$. Sia x_1 un punto di A_1; vi è un disco $B(x_1, \alpha_1)$ contenuto in A_1, e si può supporre che $\alpha_1 < 1$. Consideriamo ora l'intersezione tra $B(x_1, \alpha_1/2)$ e A_2: non è vuota perchè A_2 è denso in X. Possiamo dunque trovare un punto x_2 e un numero reale α_2 tali che

$$B(x_2, \alpha_2) \subset B(x_1, \alpha_1/2) \cap A_2 \,.$$

Procedendo allo stesso modo si costruiscono induttivamente una successione $\{x_n\}$ di punti di X e una successione di numeri reali positivi $\{\alpha_n\}$ tali che

$$B(x_{n+1}, \alpha_{n+1}) \subset B(x_n, \alpha_n/2) \cap A_{n+1} \tag{8.1}$$

per ogni n. Ne segue che

$$\alpha_n \leq \alpha_{n-1}/2 \leq \alpha_{n-2}/4 \leq \cdots \leq \alpha_1/2^{n-1} \leq 1/2^{n-1} \,,$$

e inoltre che

$$x_m \in B(x_n, \alpha_n/2) \qquad \text{se } m > n \,. \tag{8.2}$$

Da ciò segue che

$$d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^n} \qquad \text{se } m > n \,,$$

e quindi che $\{x_n\}$ è di Cauchy. Sia x il limite di $\{x_n\}$. Segue da (8.2) che x appartiene a $B(x_n, \alpha_n)$ per ogni n, e da (8.1), unito al fatto che $B(x_1, \alpha_1)$ è contenuto in A_1, che appartiene a tutti gli A_n. Ciò conclude la dimostrazione.

Esercizi

8.1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione analitica (ricordiamo che ciò significa che f ammette, in ogni punto p di $\mathbb{R}$, uno sviluppo in serie di potenze che converge uniformemente a f in un intorno di p). Supponiamo che per ogni $p \in \mathbb{R}$ esista un $n \in \mathbb{N}$ tale che $f^{(n)}(p) = 0$. Si dimostri che f è un polinomio. Cosa si può dire se si suppone solo che f sia C^∞, cioè che f sia infinitamente derivabile?

8.2 Se $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ è un polinomio in n variabili a coefficienti razionali, visto come funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, indichiamo con Γ_P il grafico di P:

$$\Gamma_P = \{(y, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y = P(x_1, \ldots, x_n)\} .$$

Sia $B = \bigcup_P \Gamma_P$ l'unione di tutti i grafici di polinomi a coefficienti razionali. Si dimostri che $A = \mathbb{R}^{n+1} \setminus B$ è un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}^{n+1}$.

8.3 Sia A il sottoinsieme di $X = C([0,1], \mathbb{R})$ definito da:

$$A = \{f \in X \,|\, f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} .$$

Si dimostri che A è denso in X.

9 Il teorema di Ascoli

Siano X e Y spazi metrici. Un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $C(X, Y)$ si dice *equicontinuo* se, per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $x \in X$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{F}$ e ogni punto $y \in X$ tale che $d(x, y) < \delta$, si abbia

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon . \tag{9.1}$$

Diremo che $\mathcal{F}$ è *uniformemente equicontinuo* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni coppia di punti x, y di X tali che $d(x, y) < \delta$, valga la (9.1).

Proposizione 9.1. *Se X è compatto e $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ è equicontinuo, allora $\mathcal{F}$ è uniformemente equicontinuo.*

Dimostriamo questa proposizione ragionando per assurdo. Se la tesi è falsa, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vi sono $x_n, y_n \in X$ e $f_n \in \mathcal{F}$ tali che

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \qquad d(f_n(x_n), f_n(y_n)) \geq \varepsilon .$$

Poiché X è compatto, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ hanno sottosuccessioni convergenti $\{x_{n_i}\}$ e $\{y_{n_i}\}$, che devono necessariamente avere lo stesso limite x. Sia ora $\delta > 0$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{F}$, si abbia

$$d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ogni volta che $d(x, y) < \delta$. Poiché, se i è abbastanza grande, $d(x_{n_i}, x) < \delta$ e $d(y_{n_i}, x) < \delta$, si conclude che

$$d(f_{n_i}(x_{n_i}), f_{n_i}(y_{n_i})) \leq d(f_{n_i}(x_{n_i}), f_{n_i}(x)) + d(f_{n_i}(x), f_{n_i}(y_{n_i})) < \varepsilon ,$$

in contraddizione con quanto supposto. Questo conclude la dimostrazione della proposizione 9.1.

Teorema 9.2 (di Ascoli)**.** *Siano X e Y spazi metrici compatti. Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme chiuso ed equicontinuo di $C(X,Y)$. Allora $\mathcal{F}$ è compatto.*

Prima di dimostrare il teorema facciamo alcune osservazioni. In primo luogo basta mostrare che $\mathcal{F}$ è compatto per successioni, dato che $C(X,Y)$ è uno spazio metrico. Poi, come segue dall'Esercizio (6.2), vi è un sottoinsieme numerabile di X,

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}\,,$$

tale che $\overline{A} = X$. Da ultimo, segue dalla proposizione 9.1 che $\mathcal{F}$ è uniformemente equicontinuo.

Sia ora $\{f_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{F}$. Poiché Y è compatto, $\{f_n\}$ ha una sottosuccessione $\{f_n^{(1)}\}$ tale che $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$ sia convergente. A sua volta $\{f_n^{(1)}\}$ ha una sottosuccessione $\{f_n^{(2)}\}$ tale che $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$ sia convergente; si noti che anche $\{f_n^{(2)}(x_1)\}$ è convergente, in quanto sottosuccessione di $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. Ripetendo questa osservazione si costruisce una successione di sottosuccessioni $\{f_n^{(h)}\}$ di $\{f_n\}$ con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}&\{f_n^{(h+1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è una sottosuccessione di } \{f_n^{(h)}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ per ogni } h\,,\\ &\{f_n^{(h)}(x_i)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è convergente per ogni } i \text{ tale che } i \le h\,.\end{aligned}$$

La successione diagonale

$$g_k = f_k^{(k)}$$

è una sottosuccessione di $\{f_n\}$ e inoltre

$$\{g_k(x_i)\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ è convergente per ogni } i\,. \tag{9.2}$$

Poiché Y è compatto, e quindi completo, $C(X,Y)$ è completo. Per concludere la dimostrazione basterà perciò mostrare che $\{g_k\}$ è una successione di Cauchy (rispetto alla metrica della convergenza uniforme). La dimostrazione dipenderà solo da (9.2), dalla compattezza di X, e dalla equicontinuità uniforme della successione $\{g_k\}$. Quest'ultima proprietà ci dice che, fissato $\varepsilon > 0$, vi è $\delta > 0$ tale che, se $d(x,y) < \delta$, allora

$$d(g_k(x), g_k(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{per ogni } k\,.$$

Poiché A è denso in X,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \delta)$$

e, poiché X è compatto, vi sono indici $i_1, \dots, i_m$ tali che

$$X = B(x_{i_1}, \delta) \cup \dots \cup B(x_{i_m}, \delta)\,. \tag{9.3}$$

Ora, per la proprietà (9.2), esiste un intero k_0 tale che, se $h, k \ge k_0$,

$$d(g_h(x_{i_j}), g_k(x_{i_j})) < \frac{\varepsilon}{3}\,, \qquad j = 1, \dots, m\,.$$

Siano dunque $h, k \ge k_0$. Per ogni $x \in X$, in virtù di (9.3), possiamo trovare un j tale che $d(x, x_{i_j}) < \delta$. Allora

$$\begin{aligned} d(g_h(x), g_k(x)) &\le d(g_h(x), g_h(x_{i_j})) + d(g_h(x_{i_j}), g_k(x_{i_j})) + d(g_k(x_{i_j}), g_k(x))\\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Ciò mostra che $\{g_k\}$ è di Cauchy, e conclude la dimostrazione.

Il risultato che segue mostra che la condizione di equicontinuità è necessaria per la validità del teorema di Ascoli.

Proposizione 9.3. *Siano X e Y spazi metrici, e sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme compatto di $C(X,Y)$. Allora $\mathcal{F}$ è equicontinuo.*

La dimostrazione è per assurdo. Supponiamo che vi siano $x \in X$, $\varepsilon > 0$ e successioni $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, $\{x_n\} \subset X$ tali che

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n}, \qquad d(f_n(x_n), f_n(x)) \geq \varepsilon. \tag{9.4}$$

Come conseguenza della compattezza di $\mathcal{F}$, la successione $\{f_n\}$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente $\{f_{n_i}\}$; indichiamone con f il limite. Osserviamo che

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x_{n_i}) = f(x),$$

in quanto $d(f_{n_i}(x_{n_i}), f(x)) \leq d(f_{n_i}(x_{n_i}), f(x_{n_i})) + d(f(x_{n_i}), f(x))$ e il lato destro di questa disuguaglianza converge a zero perchè $f_{n_i} \to f$, $x_{n_i} \to x$. Ma allora segue da (9.4) che

$$\varepsilon \leq \lim_{i\to\infty} d(f_{n_i}(x_{n_i}), f_{n_i}(x)) = d(f(x), f(x)) = 0,$$

il che è assurdo.