SOLLEVAMENTO DI OMOTOPIE

MAURIZIO CORNALBA

Siano $\alpha\colon X \to Y$ e $f\colon Z \to Y$ applicazioni continue. Un *sollevamento* di f è una applicazione continua $f'\colon Z \to X$ tale che $f = \alpha \circ f'$. Indichiamo con I l'intervallo chiuso $[0,1]$.

Proposizione 1. *Sia $\alpha\colon X \to Y$ un rivestimento, e sia $\gamma\colon I \to Y$ un cammino. Poniamo $y_0 = \gamma(0)$, e sia x_0 un punto di X tale che $\alpha(x_0) = y_0$. Esiste un sollevamento $\eta\colon I \to X$ di γ tale che $\eta(0) = x_0$; questo sollevamento è unico.*

Dimostriamo innanzitutto l'unicità del sollevamento. Siano η e δ due sollevamenti di γ con $\eta(0) = \delta(0) = x_0$, e poniamo

$$A = \{t \in I : \delta(t) = \eta(t)\}\,, \qquad B = \{t \in I : \delta(t) \neq \eta(t)\}\,.$$

Mostreremo che A e B sono aperti. Dato che A non è vuoto e I è connesso, ne seguirà che $A = I$, cioè che $\delta = \eta$. Se $t \in I$, scegliamo un intorno aperto U di $\gamma(t)$ che sia uniformemente rivestito. Dunque $\alpha^{-1}(U) = \coprod U_i$, dove gli U_i sono aperti in X e la mappa $\alpha_i\colon U_i \to U$ indotta da α è un omeomorfismo per ogni i. Il punto $\eta(t)$ appartiene a U_i per qualche i, e $\delta(t)$ appartiene a U_j per qualche j. Per continuità, se s è vicino a t, $\eta(s) \in U_i$ e $\delta(s) \in U_j$. Se $t \in A$, $i = j$, e $\eta(s)$ è l'unico punto di U_i la cui immagine è $\gamma(s)$, cioè $\alpha_i^{-1}\gamma(s)$. Lo stesso si può dire di $\delta(s)$. Dunque A è aperto. Se invece $t \in B$, allora $i \neq j$, e dunque $U_i \cap U_j = \emptyset$. Ne segue che $\eta(s) \neq \delta(s)$ se s è vicino a t. Quindi B è aperto.

Occupiamoci ora dell'esistenza di un sollevamento. Poniamo

$$D = \{t \in I : \text{esiste un sollevamento } \lambda \text{ di } \gamma \text{ su } [0,t] \text{ tale che } \lambda(0) = x_0\}$$

e indichiamo con E il suo complementare in I. Notiamo che D non è vuoto. Mostreremo che D e E sono aperti, e quindi, per la connessione di I, che $D = I$. Avremo così mostrato che esiste un sollevamento η di γ a tutto I con la proprietà che $\eta(0) = x_0$. Sia t un punto di I, e siano U, U_i, α_i come nella dimostrazione di unicità. Se $t \in D$, l'intervallo $[0,t]$ è contenuto in D. Se λ è un sollevamento di γ a $[0,t]$ con $\lambda(0) = x_0$, e $\lambda(t) \in U_i$, allora, per qualche $\varepsilon > 0$, $\lambda(s) \in U_i$ per $s \in [t-\varepsilon, t]$, e $\gamma(s) \in U$ per $s \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$. Inoltre, su $[t-\varepsilon, t]$, λ è data da $\lambda(s) = \alpha_i^{-1}\gamma(s)$. Ponendo $\lambda(s) = \alpha_i^{-1}\gamma(s)$ anche su $[t, t+\varepsilon]$ si ottiene una estensione di λ a tutto $[0, t+\varepsilon]$. Questo mostra che D è aperto. Supponiamo invece che $t \in E$. Quando ε è sufficientemente piccolo $\gamma([t-\varepsilon, t]) \subset U$. Se esistesse un sollevamento λ di γ a $[0, t-\varepsilon]$ potremmo estenderlo a $[0,t]$ ponendo $\lambda(s) = \alpha_i^{-1}\gamma(s)$ su $[t-\varepsilon, t]$, dove i è scelto in modo che $\lambda(t-\varepsilon) \in U_i$. Quindi $t - \varepsilon \in E$ se ε è sufficientemente piccolo. Ciò significa che E è aperto.

Proposizione 2. *Sia $\alpha\colon X \to Y$ un rivestimento, sia $\eta\colon Z \to X$ una applicazione continua, e sia $\varphi\colon Z \times I \to Y$ una omotopia tale che $\varphi_0 = \alpha \circ \eta$. Allora esiste un sollevamento $\psi\colon Z \times I \to X$ di φ tale che $\psi_0 = \eta$; questo sollevamento è unico.*

Per ogni fissato $z \in Z$, al cammino $t \mapsto \psi(z,t)$ si chiede di essere un sollevamento di $t \mapsto \varphi(z,t)$ con punto iniziale $\eta(z)$. Per la proposizione precedente un tale sollevamento esiste ed è unico. Questo dimostra l'unicità del sollevamento di cui la proposizione asserisce l'esistenza. Mostra anche che esiste una applicazione $\psi(z,t)$ da $Z \times I$ a X, continua in t, tale che $\alpha \circ \psi = \varphi$ e che $\psi(z,0) = \eta(z)$ per ogni $z \in Z$. Basterà allora provare che ψ è continua in entrambe le variabili per mostrare che essa è il sollevamento cercato.

Per dimostrare la continuità di ψ procediamo come segue. Fissiamo $z \in Z$, e ragioniamo per assurdo, supponendo che vi siano dei $t \in I$ tali che ψ non sia continua in (z,t). Indichiamo con t_0 l'estremo inferiore di questi t. Sia U un intorno aperto uniformemente rivestito di $\varphi(z,t_0)$, e scriviamo $\alpha^{-1}(U) = \coprod U_i$, dove gli U_i sono aperti in X e la mappa $\alpha_i \colon U_i \to U$ indotta da α è un omeomorfismo per ogni i. Vi è un intorno di (z,t_0) della forma $W \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \delta]$, dove W è aperto in Z, $\varepsilon > 0$ se $t_0 > 0$ e $\delta > 0$ se $t_0 < 1$, interamente contenuto in $\varphi^{-1}(U)$. Vi è dunque un i tale che $\psi(z, t_0 - \varepsilon) \in U_i$. Notiamo che $w \mapsto \psi(w, t_0 - \varepsilon)$ è continua nel punto z. Ciò segue dalla definizione di t_0 quando $t_0 > 0$, e dal fatto che $\psi(w,0) = \eta(w)$ per ogni $w \in W$ quando $t_0 = 0$. Possiamo dunque supporre che $\psi(w, t_0 - \varepsilon) \in U_i$ per ogni $w \in W$. Ma allora, poiché ψ è continua nella variabile t e l'intervallo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \delta]$ è connesso, $\psi(W \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \delta]) \subset U_i$. Quindi, su $W \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \delta]$, la funzione ψ coincide con $\alpha_i^{-1} \circ \varphi$, ed è dunque continua, contro la scelta di t_0.