GEOMETRIA 1 - geometria proiettiva - 16 giugno 2015 - soluzione

1.
$R_1 \ : \ x' = 2 - x, \quad y' = 2 - y \ ;$
$R_2 \ : \ x' = 4 - x, \quad y' = 4 - y \ ;$
$T \ : \ x' = x - 2, \quad y' = y - 2 \ .$
L'isometria T è ovviamente una traslazione. Si noti che la composta delle simmetrie rispetto a due punti distinti del piano euclideo è sempre una traslazione (perchè?).

I punti fissi dell'estensione di R_1 al piano proiettivo reale si possono trovare con il metodo solito degli autovettori. Però, in questo caso, si vede subito che sono il punto proprio centro di simmetria e tutti i punti impropri.

Analogamente, si vede subito che le rette fisse sono la retta impropria e tutte le rette per il centro di simmetria. Si osservi che la configurazione dei punti fissi e la configurazione delle rette fisse sono duali tra loro. Questo è vero per ogni proiettività (si cerchi di dimostrarlo).

E' chiaro dalla rappresentazione mediante le coordinate che la trasformazione S è una similitudine. Ma conviene essere più precisi.
Si trova subito che, nel piano euclideo, c'è un unico punto fisso, il punto $(2/3, 2/3)$. Dal momento che si può riscrivere la rappresentazione di S come segue:
$S \ : \ x' - \frac{2}{3} = -2 \ (x - \frac{2}{3}), \quad y' - \frac{2}{3} = -2 \ (y - \frac{2}{3}) \ ,$
si ottiene che S è un'omotetia, avente centro nel punto fisso.

Si può aggiungere che ogni similitudine non isometrica H del piano euclideo ha uno e un solo punto fisso. Ciò è conseguenza del teorema delle contrazioni, dal momento che o H oppure H^{-1} è una contrazione del piano euclideo.

L'estensione dell'omotetia S al piano proiettivo reale ha come punti fissi, oltre al punto proprio già noto, tutti i punti impropri. Sono fisse, oltre alla retta impropria, tutte le rette per il punto fisso proprio.

Si poteva anche osservare che S si ottiene eseguendo, nell'ordine, un'omotetia Ω di centro nell'origine e la simmetria R_1 già considerata: $S = R_1 \circ \Omega$. Da questo risulta: $G = R_1 \circ S = R_1 \circ (R_1 \circ \Omega) = (R_1 \circ R_1) \circ \Omega = \Omega$; dunque G è un'omotetia di centro nell'origine.

2.
Classificazione proiettiva:

in campo complesso:
Γ_1 è non degenere, Γ_2 è doppiamente degenere (il supporto è costituito dai punti della retta $x_1 + x_2 - x_3 = 0$);

in campo reale:
il supporto di Γ_1 è dotato di punti reali, su Γ_2 non c'è niente da aggiungere.

Come trovare il supporto di Γ_2? Si può, ad esempio, procedere come segue:
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)x_3 + x_3^2 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 \ .$
Usare coordinate non omogenee rende, forse, i calcoli più chiari.

Classificazione affine:

Γ_1 è una parabola.

Precisazione (eventuale e non richiesta) dal punto di vista euclideo:
l'asse di Γ_1 è ortogonale al supporto di Γ_2 .

I supporti delle due coniche si intersecano nei punti $[1, 0, 1]$ e $[0, 1, 1]$. Conviene precisare che in tali punti Γ_1 è tangente alle rette $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ (cioè agli assi cartesiani).

3.
Il disegno di $\Gamma_{2,0}$ è facile. Neanche il disegno di $\Gamma_{1,0}$ presenta difficoltà, se si osserva che la bisettrice del primo e del terzo quadrante è asse di simmetria e che gli assi x e y sono tangenti alla parabola.

I supporti di Γ_1 e di Γ_2 sono connessi e compatti. Gli insiemi $\Gamma_{1,0}$ e $\Gamma_{2,0}$ non sono compatti, perchè non sono limitati nel piano euclideo. Entrambi sono connessi. L'intersezione è costituita da due punti distinti: è compatta, non è connessa.

Gli insiemi $\Gamma_{1,0}$ e $\Gamma_{2,0}$ sono omeomorfi. Si può ragionare così: il supporto di Γ_1 nel piano proiettivo reale è omeomorfo a S^1 ; S^1 meno un punto è omeomorfo a una retta.
L'insieme $\Gamma_{1,0} \cup \Gamma_{2,0}$ non è omeomorfo agli altri due. Infatti contiene due punti che non hanno alcun intorno omeomorfo ad un intervallo. Oppure si può osservare che il complementare di ogni punto in $\Gamma_{1,0}$ e in $\Gamma_{2,0}$ non è connesso, il che non è vero per $\Gamma_{1,0} \cup \Gamma_{2,0}$.
Fra i tre insiemi considerati, non ve ne sono due equivalenti dal punto di vista affine.

4.
La prima affermazione è falsa. Basta ricordare la trasformazione S della prima parte o pensare a una qualunque altra omotetia.

La seconda affermazione è vera.

Il modo più rapido per dimostrarlo è osservare che, se tutti i punti impropri sono fissi, la proprietà si conserva nell'estensione della proiettività al piano proiettivo complesso. Dunque i punti ciclici sono fissi, e questo basta per affermare che si tratta di una similitudine.

Però, non tutto ciò fa parte del programma d'esame. Allora si può considerare la matrice che rappresenta la proiettività. La sottomatrice 2 x 2 ottenuta dall'incrocio delle prime due orizzontali e delle prime due verticali rappresenta la restrizione alla retta impropria. Dunque rappresenta l'identità, ed è pertanto il prodotto di uno scalare non nullo per la matrice identica. Ma allora la trasformazione affine H è una similitudine.