Corso di Geometria 1 – a.a. 2014-2015

Prova scritta di topologia del 15 giugno 2015

1. Consideriamo i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

   - $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
   - $S = \{(x, y) : x > 0\}$
   - $R = \{((e^{-t} + 1)\cos(t), (e^{-t} + 1)\sin(t)) : t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$

   e poniamo $p = (1, 0)$. Per ognuno dei seguenti spazi topologici dire se è di Hausdorff, compatto, connesso, connesso per archi:

   - $X = C \cup S$
   - $Y = X/S$
   - $W = R \cup \{p\}$
   - $Z = R \cup C$

2. Siano X e Y spazi metrici. Supponiamo che X sia compatto e che Y sia completo. Siano p e q punti di X, e sia K una costante positiva. Sia L l'insieme delle funzioni continue $f : X \to Y$ tali che $d(f(p), f(q)) \leq K$, munito della distanza

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

   Mostrare che L è uno spazio metrico completo.

3. (a) Dare un esempio di uno spazio metrico X e di una funzione $f : X \to X$ tali che
      1. X è completo;
      2. $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ per ogni scelta di $x, y \in X$ con $x \neq y$;
      3. f non ha punti fissi.

   (b) Enunciare il teorema delle contrazioni e spiegare brevemente perché nessuna delle ipotesi può essere tolta senza compromettere la validità del risultato.

Soluzioni

1. X, W, Z sono di Hausdorff perché sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che è di Hausdorff. X non è compatto perché illimitato. Sia $\pi : X \to Y$ l'applicazione quoziente. Y è compatto perché è immagine del compatto C tramite π. Z è compatto perché è la chiusura di R ed è limitato (è contenuto nella palla chiusa di centro l'origine e raggio $1 + e$). W non è compatto perché non è chiuso. X è connesso per archi, quindi connesso, perché unione di connessi per archi non disgiunti (la circonferenza C e il semipiano S, che è convesso). Y è connesso per archi, quindi connesso, perché immagine del connesso per archi X.

   Mostriamo che Y non è di Hausdorff. Sia $q \in Y$ il punto $\pi(0, 1)$ e sia $r \in Y$ il punto immagine di S. Sia A un aperto di Y contenente q. Dato che $(0, 1)$ è nella chiusura di S l'aperto $f^{-1}(A)$ ha intersezione non vuota con S. Quindi A contiene r. In conclusione q e r non hanno intorni disgiunti.

Resta da mostrare che W e Z sono connessi ma non connessi per archi. Lo facciamo solo per Z. Il ragionamento per W è del tutto analogo. Sia $q = (\cos(s_0), \sin(s_0))$ un punto di C. Dato che $q \in \overline{R}$ ogni aperto contenente q interseca R. Quindi ogni aperto non vuoto di Z interseca R. Ne segue che se Z fosse unione disgiunta di due aperti non vuoti lo sarebbe anche R. Questo è assurdo perché R è connesso in quanto immagine del connesso $[0, +\infty[$ tramite una applicazione continua. Mostriamo che Z non è connesso per archi, sempre ragionando per assurdo. Consideriamo un intorno aperto A di q in $\mathbb{R}^2$ della forma

$$A = \{(r\cos(s), r\sin(s)) : 1 - \varepsilon < r < 1 + \varepsilon,\ s_0 - \varepsilon < s < s_0 + \varepsilon\}$$

dove ε è piccolo. Le componenti connesse di $A \cap Z$ sono l'arco di cerchio

$$A_0 = \{(\cos(s), \sin(s)) : s_0 - \varepsilon < s < s_0 + \varepsilon\}$$

e gli insiemi

$$A_n = \{((e^{-s} + 1)\cos(s), (e^{-s} + 1)\sin(s)) : s_0 + 2n\pi - \varepsilon < s < s_0 + 2n\pi + \varepsilon\}$$

per n abbastanza grande. Ora sia $\gamma(t)$ un cammino in Z. Se $\gamma(t_0) = q$, per connessione un intero intorno di t_0 ha immagine contenuta in A_0. Per l'arbitrarietà di q ne segue che l'insieme dei $t \in [0, 1]$ tali che $\gamma(t) \in C$ è aperto. Dato che è anche chiuso se ne deduce che un cammino che passi per q è interamente contenuto in C. Quindi non esistono cammini congiungenti q a punti di R.

2. Sia C lo spazio delle funzioni continue da X a Y, con la metrica data. È noto che si tratta di uno spazio metrico completo, perché Y è completo. Sia $\{f_n\}$ una successione in L convergente a $f \in C$. Dunque
$$d(f_n(p), f_n(q)) \leq K$$
per ogni n. Passando al limite per $n \to \infty$ si conclude che
$$d(f(p), f(q)) \leq K$$
cioè che $f \in L$. Questo mostra che L è chiuso in C. Dato che C è completo lo è anche L.

3. (a) $X = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}$, $f(t) = t + 1/t$. X è completo perché chiuso in $\mathbb{R}$, che è completo. La funzione f è strettamente crescente perché ha derivata strettamente positiva per $t > 0$. Quindi se $t > s$
$$|f(t) - f(s)| = f(t) - f(s) = t - s + 1/t - 1/s < t - s = |t - s|\,.$$