Corso di Geometria 1 – a.a. 2014-2015

Prova scritta di topologia del 18 gennaio 2016

1. (a) Per ognuna delle proprietà i-iii dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che goda della proprietà stessa:
   i. f è continua ma non aperta;
   ii. f è continua ma non chiusa;
   iii. f è chiusa ma non continua;

   (b) Dare un esempio di uno spazio topologico X e di una applicazione $f : X \to \mathbb{R}$ che sia aperta ma non continua.

2. Per ogni numero razionale r tale che $0 < r < 1$ scriviamo $r = a/b$, dove a e b sono interi positivi primi fra loro e indichiamo con I_r il segmento in $\mathbb{R}^2$ di estremi $(\cos(2\pi r), \sin(2\pi r))$ e $\frac{1}{b}(\cos(2\pi r), \sin(2\pi r))$. Sia C il cerchio unitario in $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine. Poniamo

$$X = C \cup \left(\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ 0<r<1}} I_r \right) \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$$

   Dire se X è:

   (a) di Hausdorff;
   (b) connesso;
   (c) connesso per archi;
   (d) compatto.

3. Sia X uno spazio topologico. Indichiamo con $C(X)$ l'insieme delle funzioni continue $X \to \mathbb{R}$. Se f è un elemento di $C(X)$ e ρ un elemento di $C(X)$ a valori strettamente positivi poniamo

$$N(f, \rho) = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \rho(x) \text{ per ogni } x \in X\}$$

   (a) Mostrare che l'insieme di tutti gli insiemi $N(f, \rho)$ è la base di una topologia $\mathcal{A}$ su $C(X)$.
   (b) Mostrare che se X è compatto $\mathcal{A}$ coincide con la topologia della convergenza uniforme.
   (c) Mostrare che se $X = \mathbb{R}$ non esiste una metrica su $C(X)$ che induca la topologia $\mathcal{A}$.

Soluzioni

1. (a) i.

$$f(t) = |t|$$

   $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$, che non è aperto in $\mathbb{R}$.

   ii.

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

   $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$, che non è chiuso in $\mathbb{R}$.

iii.
$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t \leq 0 \\ 1 \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

$f(\mathbb{R})$ è un insieme finito, quindi ogni suo sottinsieme è chiuso in $\mathbb{R}$.

(b) Basta porre $X = \mathbb{R}$ con una topologia $\mathcal{A}$ strettamente meno fine di quella usuale (cioè una i cui elementi siano tutti aperti nella topologia usuale, ma non viceversa) e come f l'identità. Ad esempio si può prendere come $\mathcal{A}$ la topologia banale o quella i cui aperti sono l'insieme vuoto e i complementari dei sottinsiemi finiti.

2. (a) Sì perché $\mathbb{R}^2$ è di Hausdorff e ogni sottoinsieme di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff.

(b) Sì. $Y = X \smallsetminus \{(0,0)\}$ è connesso per archi e quindi connesso. Ne segue che se A e B sono aperti disgiunti in X la cui unione è X e $A \cap Y \neq \emptyset$ allora $A \supset Y$. Quindi se B non è vuoto allora $B = \{(0,0)\}$. Questo è assurdo dato che $\{(0,0)\}$ non è aperto in X. Infatti, se U è un aperto in $\mathbb{R}^2$ contenente l'origine, esiste un disco $B((0,0),\varepsilon)$ contenuto in U, e $\frac{1}{b}(\cos(2\pi/b), \sin(2\pi/b)) \in B((0,0),\varepsilon) \cap Y \subset U \cap Y$ se b è un intero tale che $b\varepsilon > 1$.

(c) No. Supponiamo per assurdo che ci sia un cammino $\gamma : [0,1] \to X$ dall'origine a un altro punto di X. Se t è sufficientemente piccolo $\gamma(t)$ dista meno di 1 dall'origine; quindi se δ è piccolo $\gamma([0,\delta]) \subset X \cap B((0,0),1)$. Ora le componenti connesse di $X \cap B((0,0),1)$ sono $\{(0,0)\}$ e i segmenti $I_r \cap B((0,0),1)$. Quindi $\gamma([0,\delta]) \subset \{(0,0)\}$; in altre parole $\gamma(t) = (0,0)$ per ogni $t \leq \delta$. Ne segue che γ deve essere il cammino costante, contro quanto supposto.

(d) No. Basta mostrare che X non è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^2$. Siano s un numero irrazionale compreso tra 0 e 1. Esiste una successione di numeri razionali $r_n \in]0,1[$ convergente a s. Allora $\frac{3}{4}(\cos(2\pi r_n), \sin(2\pi r_n)) \in I_{r_n}$ e la successione $\frac{3}{4}(\cos(2\pi r_n), \sin(2\pi r_n))$ converge a $\frac{3}{4}(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$, che non appartiene a X.

3. (a) L'unione degli $N(f,\rho)$ è $C(X)$ dato che $f \in N(f,\rho)$. Supponiamo ora che $g \in N(f,\rho) \cap N(h,\sigma)$. La funzione $\alpha(x) = \rho(x) - |f(x) - g(x)|$ è continua e strettamente positiva. Lo stesso vale per la funzione $\beta(x) = \sigma(x) - |h(x) - g(x)|$. Ora poniamo $\tau(x) = \min(\alpha(x), \beta(x))$. Anche τ è continua e strettamente positiva. Dico che $N(g,\tau) \subset N(f,\rho) \cap N(h,\sigma)$. Sia infatti u un elemento di $N(g,\tau)$. Allora $|u(x) - f(x)| < \rho(x)$ per ogni $x \in X$ dato che

$$\begin{aligned} |u(x) - f(x)| &\leq |u(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &< \tau(x) + |g(x) - f(x)| \leq \alpha(x) + |g(x) - f(x)| = \rho(x) \end{aligned}$$

Analogamente si mostra che $|u(x) - h(x)| < \sigma(x)$ per ogni $x \in X$.

(b) Se $f \in C(X)$ e ε è una costante positiva, $B(f,\varepsilon) = N(f,\varepsilon)$. Viceversa, se ρ è una funzione continua a valori reali positivi, $\varepsilon = \min\{\rho(x) : x \in X\}$ è strettamente positivo, e $B(f,\varepsilon) \subset N(f,\rho)$.

(c) Supponiamo che esista una metrica d che induce $\mathcal{A}$. Allora ogni intorno della funzione identicamente nulla contiene una palla della forma $B(0,1/n)$, che a sua volta contiene un insieme $N(0,\rho_n)$. Mostriamo che nel caso $X = \mathbb{R}$ questo porta a una contraddizione. Definiamo una funzione continua strettamente positiva $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\sigma(x) = (x-n)\frac{\rho_{n+1}(n+1)}{2} + (n+1-x)\frac{\rho_n(n)}{2} \quad \text{se } n \leq x \leq n+1,\ n \in \mathbb{Z}$$

Questa funzione è costruita in modo da essere un polinomio di primo grado tra due interi consecutivi e da valere $\rho_x(x)/2$ per x intero. La funzione $f_n = \frac{3}{4}\rho_n$ appartiene a $N(0, \rho_n)$ dato che $|f_n(x) - 0| = \frac{3}{4}\rho_n(x) < \rho_n(x)$, ma non appartiene a $N(0, \sigma)$ in quanto

$$|f_n(n) - 0| = \frac{3}{4}\rho_n(n) > \frac{1}{2}\rho_n(n) = \sigma(n)$$

Dunque l'intorno $N(0, \sigma)$ della funzione nulla non contiene alcun intorno $N(0, \rho_n)$, contro quanto concluso sopra.