

Corso di Geometria 1 – a.a. 2014-2015

Esempio di prova scritta di topologia

1. Siano X e Y spazi topologici, siano $f, g : X \rightarrow Y$ due funzioni continue e poniamo $Z = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$.
 - (a) Mostrare che se Y è di Hausdorff allora Z è chiuso in X .
 - (b) Mostrare con un controesempio che la conclusione del punto (a) non è sempre valida se Y non è di Hausdorff.
 - (c) Mostrare che se Y non è di Hausdorff si possono sempre trovare uno spazio X e due funzioni continue $f, g : X \rightarrow Y$ tali che Z non sia chiuso.

2. Sia X uno spazio topologico e sia I l'intervallo chiuso $[0, 1]$. Poniamo $Z = X \times \{1\} \subset X \times I$. Indichiamo con Y il quoziente $(X \times I)/Z$.
 - (a) Mostrare che Y è connesso per archi.
 - (b) Mostrare che Y è contraibile.
 - (c) Mostrare che se X è compatto lo stesso è vero per Y , e che se inoltre X è di Hausdorff lo stesso è vero per Y .

3. Discutere brevemente, anche con esempi, le varie condizioni su uno spazio metrico equivalenti alla compattezza.