Corso di Geometria 1 – a.a. 2015-2016

Prova scritta del 13 giugno 2016

1. Siano X e Y spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una applicazione continua suriettiva. Poniamo

$$R = \{(x, x') : f(x) = f(x')\} \subset X \times X$$

   (a) Mostrare che se Y è di Hausdorff R è un chiuso in $X \times X$.

   (b) Dare un esempio in cui R è un chiuso ma Y non è di Hausdorff.

   (c) Mostrare che se R è chiuso in $X \times X$ e f è aperta allora Y è di Hausdorff.

2. Per ogni n intero positivo sia $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione che ad ogni $x \in]0, +\infty[$ associa x/n. Sia inoltre $f_0 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione costantemente nulla. Si considerino i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{graf}(f_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x, f_n(x)) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \mid x \in]0, +\infty[\}$$
$$X = G \cup \big[ ]0, +\infty[\times \{1\} \big]$$

   forniti della topologia indotta da quella usuale su $\mathbb{R}^2$. Motivando le risposte, dire se:

   (a) X è compatto;

   (b) X è connesso;

   (c) X è connesso per archi;

   (d) X è uno spazio di Hausdorff.

3. Sia X uno spazio topologico e sia Y uno spazio metrico. Indichiamo con $C(X, Y)$ lo spazio delle funzioni continue $X \to Y$, munito della topologia della convergenza uniforme. Per ogni $y \in Y$ sia $e_y \in C(X, Y)$ la funzione (costante) data da $e_y(x) = y$ per ogni $x \in X$.

   (a) Mostrare che la funzione $j : Y \to C(X, Y)$ definita da $j(y) = e_y$ è continua.

   Supponiamo che X sia un sottinsieme convesso, chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$.

   (b) Mostrare che se Y è connesso anche $C(X, Y)$ è connesso.

   (c) Più in generale mostrare che vi è una corrispondenza biunivoca tra le componenti connesse di Y e quelle di $C(X, Y)$.

4. Si considerino in $\mathbb{P}^2$ sul campo reale la quadrica

$$\Gamma = \big\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid 3x_0^2 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_0x_2 - 3x_1x_2 = 0\big\}$$

   e in $\mathbb{R}^2$, identificato con $\big\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 \neq 0\big\}$, la quadrica

$$\Gamma_0 = \big\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid 3x_0^2 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_0x_2 - 3x_1x_2 = 0, x_0 \neq 0\big\}$$

   (a) Classificare Γ dal punto di vista proiettivo e Γ_0 dal punto di vista affine.

Per ogni $q = [t_0 : t_1] \in \mathbb{P}^1$ si considerino i seguenti punti di $\mathbb{P}^2$:

$$p_1(q) = [0 : 1 : -1],$$
$$p_2(q) = [t_0 : t_1 : 0],$$
$$p_3(q) = [t_1 : 4t_0 : -t_0].$$

(b) Determinare tutti gli elementi di

$$S = \{q \in \mathbb{P}^1 \mid p_1(q), p_2(q), p_3(q) \text{ sono allineati}\}.$$

(c) Per ogni $q \in S$ sia $r(q)$ la retta passante per $p_1(q), p_2(q), p_3(q)$. Verificare che

$$\Gamma \cap \bigcap_{q \in S} r(q) \neq \varnothing.$$

Soluzioni

1. (a) Se $(x, x') \notin R$, $f(x) \neq f(x')$. Dato che Y è di Hausdorff ci sono aperti disgiunti $A \ni f(x)$, $B \ni f(x')$. Ma allora $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti disgiunti in X, $x \in f^{-1}(A)$ e $x' \in f^{-1}(B)$. Dunque $f^{-1}(A) \times f^{-1}(B)$ è un intorno di (x, x') che non interseca R.

   (b) Sia $X = (Z, \mathcal{A})$ dove $\mathcal{A}$ è una topologia di Hausdorff e Z ha almeno due punti. Sia $Y = (Z, \mathcal{B})$, dove $\mathcal{B}$ è la topologia discreta, e sia f l'identità su Z. Allora f è continua, Y non è di Hausdorff e R non è altro che la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$, che è chiusa perché X è di Hausdorff.

   (c) Siano y, y' punti distinti di Y. Per ipotesi esistono punti $x, x' \in X$ tali che $y = f(x)$ e $y' = f(x')$. In particolare $(x, x') \notin R$, dunque ci sono aperti A e B tali che $(x, x') \in A \times B$ e $A \times B \cap R = \varnothing$, dato che R è chiuso. Ne segue che $f(A)$ e $f(B)$ sono disgiunti. D'altra parte sono aperti perché f è aperta, $x \in A$ e $x' \in B$.

2. (a) X non è compatto, essendo non limitato nè chiuso in $\mathbb{R}^2$.

   (b) X è connesso. Infatti, ponendo

$$L_0 =]0, +\infty[\times \{0\},$$
$$L_1 =]0, +\infty[\times \{1\},$$
$$G' = G \setminus L_0,$$

   si ha che $X = (G' \cup L_1) \cup L_0$. Il sottoinsieme $G' \cup L_1$ è connesso, poiché L_1 è connesso e G' è un'unione di connessi aventi con L_1 intersezione non vuota. D'altra parte, L_0 è connesso. Dunque se X per assurdo fosse sconnesso, avrebbe come componenti connesse $G' \cup L_1$ e L_0. Ma allora $G' \cup L_1$ sarebbe un chiuso di X, il che è assurdo: la successione $\{(1, 1/n)\}$ è contenuta in $G' \cup L_1$ ma sta convergendo a $(1, 0) \in X \setminus (G' \cup L_1)$.

   (c) X non è connesso per archi. Infatti se per assurdo fosse connesso per archi, esisterebbe un cammino $\gamma : [0, 1] \to X$ tale che $\gamma(0) = p_0 = (1, 0) \in L_0$ e $\gamma(1) = (1, 1) \in L_1$. Per $\varepsilon < 1$, l'aperto $X \cap B(p_0, \varepsilon)$ contiene p_0, dunque per δ sufficientemente piccolo si avrebbe $\gamma([0, \delta]) \subseteq X \cap B(p_0, \varepsilon)$. Le componenti connesse di $X \cap B(p_0, \varepsilon)$ sono $C_0 = L_0 \cap B(p_0, \varepsilon)$ e $C_n = \mathrm{graf}(f_n) \cap B(p_0, \varepsilon)$ al variare di n tra gli interi positivi. Essendo $[0, \delta]$ connesso, γ continuo e $\gamma(0) \in C_0$, dovrebbe essere $\gamma([0, \delta]) \subset C_0 \subset L_0$. Iterando il ragionamento, si concluderebbe che $\gamma([0, 1]) \subset L_0$. Tuttavia $\gamma(1) \notin L_0$, il che porterebbe all'assurdo.

(d) X è uno spazio di Hausdorff, poiché ogni sottoinsieme di uno spazio di Hausdorff, quale è $\mathbb{R}^2$ con la topologia usuale, è di Hausdorff se dotato della topologia indotta.

3. (a) $d(e_y(x), e_{y'}(x)) = d(y, y')$ per ogni $x \in X$. Quindi j è continua.

   (b) Sia $f \in C(X,Y)$. Dato che X è compatto f è uniformemente continua. Dunque, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x,x') < \delta$ allora $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Scelto un punto $p \in X$ definiamo $F : X \times [0,1] \to Y$ ponendo $F(x,t) = f(tp + (1-t)x)$; questa funzione è continua. Poniamo $F_t(x) = F(x,t)$. Sempre per la compattezza di X, esiste una costante $K > 0$ tale che due qualsiasi punti di X distano tra loro meno di K. Ne segue che $d(tp+(1-t)x, t'p+(1-t')x) \leq |t-t'|K$. Dunque, se ε e δ sono come sopra e t e t' sono sufficientemente vicini, $d(tp+(1-t)x, t'p+(1-t')x) < \delta$ per ogni x e quindi $d(F_t, F_{t'}) < \varepsilon$. In altre parole, la funzione $[0,1] \to C(X,Y)$ data da $t \mapsto F_t$ è continua. Questo significa che c'è un cammino congiungente $f = F_0$ alla funzione costante $F_1 = e_{f(p)}$. D'altra parte lo spazio delle funzioni costanti $j(Y)$ è connesso perché immagine del connesso Y. Quindi $C(X,Y)$ è connesso.

   (c) Sia $Y = \bigcup Y_i$ la decomposizione di Y in componenti connesse. Dato che X è connesso, $f(X) \subset Y_i$ per qualche i per ogni funzione $f \in C(X,Y)$. Dunque $C(X,Y)$ è unione disgiunta dei sottospazi $C(X,Y_i)$, ognuno dei quali è connesso per il punto precedente.

4. (a) Una matrice associata alla conica Γ è

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Il rango di A è 3 e il punto $[1 : \sqrt{3} : 0]$ appartiene a Γ, dunque Γ è una conica proiettiva generale dotata di punti reali.
   La sottomatrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ha determinante negativo, dunque Γ_0 è un'iperbole.

   (b) I tre punti $p_1(q), p_2(q), p_3(q)$ sono allineati in $\mathbb{P}^2$ se la matrice le cui righe corrispondono rispettivamente ai tre punti non ha rango massimo, cioè se

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ t_0 & t_1 & 0 \\ t_1 & 4t_0 & -t_0 \end{pmatrix} = 0.$$

   Risolvendo, si ottiene $t_1 = \pm t_0\sqrt{3}$, quindi $S = \{[1 : \sqrt{3}], [1 : -\sqrt{3}]\}$.

   (c) Ovviamente $[0 : 1 : -1] \in r(q)$ per ogni $q \in S$, perci basta verificare che $[0 : 1 : -1] \in \Gamma$. Sostituendone i valori nell'equazione di Γ, effettivamente si ottiene un'identità.