FUNZIONI REGOLARI SU VARIETÀ AFFINI

MAURIZIO CORNALBA

Sia k un campo algebricamente chiuso, e sia A una k-algebra di tipo finito senza nilpotenti. Si può rappresentare A (in modo tutt'altro che unico) come quoziente $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$, dove $X_1, \dots, X_n$ sono indeterminate su k e $I = \sqrt{I}$. Dunque A è l'anello delle coordinate di $X = V(I) \subset k^n$. Sia U un aperto di X. Una funzione $u\colon U \to k$ si dice *regolare* se per ogni punto x di U vi sono un intorno aperto W e elementi g, h di A tali che

$$h(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad u(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{per ogni } x \in W\,.$$

La nozione di regolarità è dunque una nozione locale, nel senso che, se $U = \bigcup U_i$ è un ricoprimento aperto di U, una funzione su U la cui restrizione a ogni U_i sia regolare è a sua volta regolare. Inoltre, date funzioni regolari u_i su ogni aperto U_i con la proprietà che le restrizioni di u_i e u_j a $U_i \cap U_j$ coincidano per ogni scelta di i e j, esiste una e una sola funzione regolare su U la cui restrizione a U_i sia u_i per ogni i. Infatti le funzioni u_i si incollano in una funzione $u\colon U \to k$, che risulta regolare per quanto prima detto. Le funzioni regolari su U possono essere sommate e moltiplicate, e costituiscono una k-algebra.

Sia ora f un elemento di A. Poniamo $D_f = X \smallsetminus V(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Gli aperti D_f costituiscono una base per la topologia di Zariski di X. Infatti, da un lato $D_f \cap D_{f'} = D_{ff'}$, dall'altro ogni aperto di X è della forma $U = X \smallsetminus V(I)$ per qualche ideale I e dunque, se $f_1, \dots, f_\ell$ sono generatori di I, si ha che

$$U = X \smallsetminus V(f_1, \dots, f_\ell) = X \smallsetminus \bigcap_i V(f_i) = \bigcup_i D_{f_i}\,.$$

Lemma 1. *Siano a, f elementi di A. Se $a(x) = 0$ per ogni $x \in D_f$, allora $fa = 0$.*

Dimostrazione. Dato che f si annulla in ogni punto del complementare di D_f, fa si annulla in ogni punto di X. In altre parole, $V(fa) = X$. Per il teorema degli zeri (Nullstellensatz), fa deve allora essere nilpotente, quindi nullo per le ipotesi su A. □

Indichiamo con R_f l'anello delle funzioni regolari su D_f. Sia $q = a/f^N$ un elemento di A_f. Per ogni $x \in D_f$, poniamo $u(x) = a(x)/f(x)^N$. È chiaro che u è una funzione regolare su D_f. Inoltre è immediato verificare che u non dipende dalla rappresentazione di q come frazione. Quindi la posizione $\alpha(q) = u$ individua una applicazione ben definita $\alpha\colon A_f \to R_f$. È ugualmente immediato verificare che α è un omomorfismo di anelli.

Lemma 2. *$\alpha\colon A_f \to R_f$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Mostriamo in primo luogo che α è iniettivo. Se $\alpha(a/f^N) = 0$, necessariamente $a(x) = 0$ per ogni $x \in D_f$. Allora $fa = 0$ per il Lemma 1, e quindi $a/f^N = fa/f^{N+1} = 0$.

Date: 10 ottobre 2008.

Ora mostriamo che α è suriettivo. Sia u una funzione regolare su D_f. Ciò significa che vi sono un ricoprimento finito $D_f = D_{f_1} \cup \cdots \cup D_{f_\ell}$ ed elementi g_i, h_i di A tali che

$$h_i(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad u(x) = \frac{g_i(x)}{h_i(x)} \quad \text{per ogni } x \in D_{f_i}\,.$$

Dato che $D_{f_i} \subset D_f$ e $D_{f_i} \subset D_{h_i}$, si ha che $D_{f_i} = D_{fh_if_i}$. Inoltre

$$\frac{g_i(x)}{h_i(x)} = \frac{g_i(x)f(x)f_i(x)}{h_i(x)f(x)f_i(x)}$$

Quindi, rimpiazzando f_i con h_iff_i e g_i con g_iff_i, si può supporre che

$$u(x) = \frac{g_i(x)}{f_i(x)} \quad \text{per ogni } x \in D_{f_i}\,.$$

Ne segue in particolare che $g_i(x)f_j(x) = g_j(x)f_i(x)$ per ogni $x \in D_{f_i} \cap D_{f_j} = D_{f_if_j}$. Quindi $f_if_jg_if_j = f_if_jg_jf_i$ per il Lemma 1. Rimpiazzando eventualmente g_i con g_if_i e f_i con f_i^2 possiamo dunque supporre che

$$g_if_j = g_jf_i \quad \text{per ogni } i \text{ e ogni } j\,. \tag{1}$$

Dato che $V(f) = V(f_1) \cap \cdots \cap V(f_\ell) = V(f_1, \ldots, f_\ell)$, si ha che $f \in \sqrt{(f_1, \ldots, f_\ell)}$ per il teorema degli zeri. In altri termini

$$f^N = \sum a_if_i\,,$$

dove $a_i \in A$ per ogni i, per qualche intero N. Ora poniamo $v = \sum a_ig_i$. Se $x \in D_{f_i}$, si ha che

$$f(x)^Ng_i(x) = g_i(x)\sum a_j(x)f_j(x) = \sum a_j(x)g_j(x)f_i(x) = v(x)f_i(x)$$

per la (1). Dunque

$$u(x) = \frac{g_i(x)}{f_i(x)} = \frac{v(x)}{f(x)^N}\,.$$

Questo mostra che $u = \alpha(v/f^N)$, e dunque che α è suriettivo. $\square$