Corso di Teoria dei Gruppi - a.a. 2009-2010

Esercizi 3

Sia G un gruppo abeliano. Indichiamo con $\widehat{G}$ l'insieme degli omomorfismi $G \to \mathbb{C}^\times$, dove $\mathbb{C}^\times$ è il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli. Se α, β sono elementi di $\widehat{G}$, poniamo $\alpha\beta(g) = \alpha(g)\beta(g)$ per ogni $g \in G$.

1. Mostrare che $\alpha\beta \in \widehat{G}$.
2. Mostrare che con il prodotto appena definito $\widehat{G}$ è un gruppo abeliano.

Il gruppo $\widehat{G}$ si chiama gruppo duale di G.

3. Mostrare che, quando G è finito, $\alpha(g)$ è una radice dell'unità per ogni $\alpha \in \widehat{G}$ e ogni $g \in G$.
4. Mostrare che, se G è ciclico di ordine d, anche $\widehat{G}$ è ciclico di ordine d.
5. Mostrare che, se G è finito, $\widehat{G}$ è isomorfo, in modo non canonico, a G.

Definiamo una applicazione $\varphi : G \to \widehat{\widehat{G}}$ associando a $g \in G$ l'omomorfismo $\varphi_g : \widehat{G} \to \mathbb{C}^\times$ definito da

$$\varphi_g(\alpha) = \alpha(g)$$

6. Verificare che φ_g è un omomorfismo.
7. Mostrare che φ è un omomorfismo di gruppi.
8. Mostrare che, se G è finito, φ è un isomorfismo.