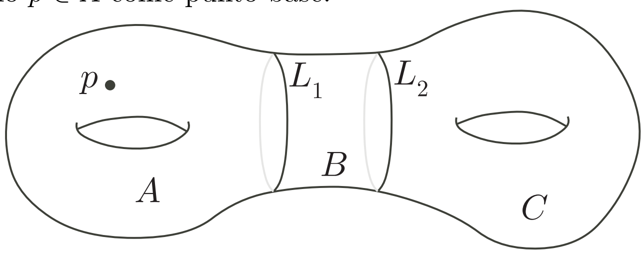
Corso di Introduzione alla Topologia Algebrica - a.a. 2005-2006

Prova scritta del 26.9.2006

1. Sia X una superficie orientabile connessa e compatta di genere 1. Mostrare che, se $Y \to X$ è un rivestimento di grado finito, e Y è connessa, anche Y è una superficie orientabile di genere 1. Viceversa, mostrare che per ogni intero $n \geq 1$ esiste un rivestimento $Y \to X$ di grado n con Y connessa.

2. Sia X una superficie di genere 2, suddivisa da due cerchi L_1 e L_2 in regioni A, B e C come in figura; scegliamo $p \in A$ come punto base.



Identifichiamo la chiusura della regione B al cilindro $S^1 \times [0,1]$, con il cerchio $S^1 \times \{0\}$ identificato a L_1 e il cerchio $S^1 \times \{1\}$ identificato a L_2. Sia $f : X \to X$ l'omeomorfismo definito come segue. Pensiamo S^1 come l'insieme dei numeri complessi di modulo 1. Allora se (z,t) è un punto di $\overline{B}$ poniamo

$$f(z,t) = (e^{2\pi i t} z, t)$$

Si noti che f è l'identità sia su L_1 che su L_2. Poniamo f uguale all'identità sulle regioni A e C.

   (a) Calcolare $f_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,p)$ e $f_* : H_1(X,\mathbb{Z}) \to H_1(X,\mathbb{Z})$.

   (b) Mostrare che f non è omotopa all'identità.