Corso di Introduzione alla Topologia Algebrica - a.a. 2006-2007
Prova scritta del 24.9.2007

1. Diciamo che $Y \subset X$ *separa* X se $X \setminus Y$ non è connesso. Siano A e B sottinsiemi di S^n, dove $n \geq 2$.
   (a) Mostrare che, se A e B sono chiusi disgiunti che non separano S^n, anche $A \cup B$ non separa S^n.
   (b) Mostrare che, se A e B sono aperti e connessi e $A \cup B = S^n$, allora $A \cap B$ è connesso.
   (c) La proprietà (a) è ancora valida se S^n è rimpiazzata dal toro n-dimensionale T^n, sempre con $n \geq 2$?

2. Indichiamo con σ l'applicazione di $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum x_i^2 = 1\}$ in sè data da $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, x_2, x_3)$. Sia I l'intervallo chiuso $[0, 1]$. Sia X lo spazio topologico ottenuto da $I \times S^2$ identificando ogni punto della forma $(0, x)$ con $(1, x)$, e Y quello ottenuto da $I \times S^2$ identificando ogni punto della forma $(0, x)$ con $(1, \sigma(x))$.
   (a) Calcolare gruppo fondamentale e gruppi di omologia intera di X e Y.
   (b) X è omeomorfo a Y?

Soluzioni

1. (a) Poniamo $U = S^n \setminus A$, $V = S^n \setminus B$. Le ipotesi implicano che U e V sono aperti connessi e che $U \cup V = S^n$. Una parte della successione di Mayer-Vietoris relativa a U e V è:

$$H^1(S^n) \to H^0(U \cap V) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(S^n) \to 0$$

   Dato che $n \geq 2$, $H^1(S^n) = 0$, quindi $H^0(U \cap V)$ è un sottogruppo di $H^0(U) \oplus H^0(V) \simeq \mathbb{Z}^2$ e dunque non ha torsione; inoltre, dato che $H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ è suriettiva, deve avere rango 1. In altre parole, $H^0(U \cap V) \simeq \mathbb{Z}$, e quindi $U \cap V = X \setminus (A \cup B)$ è connesso, cioè $A \cup B$ non separa S^n.
   (b) Basta applicare ad A e B il ragionamento applicato a U e V al punto (a).
   (c) È falsa. Consideriamo T^n come quoziente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, e siano A e B le immagini in T^n di $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ e $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1/2\}$. Sia $S^n \setminus A$ che $S^n \setminus B$ sono omeomorfi al prodotto di T^{n-1} per un intervallo aperto, e dunque sono connessi. Invece $S^n \setminus (A \cup B)$ ha due componenti connesse, ognuna omeomorfa al prodotto di T^{n-1} per un intervallo aperto.

2. (a) Il gruppo fondamentale di X e di Y è ciclico infinito. Infatti sia X che Y sono quozienti di $M = \mathbb{R} \times S^2$ modulo una azione senza punti fissi di $\mathbb{Z}$. Nel caso di X l'azione è

$$\mathbb{N} \ni n : (t, (x_1, x_2, x_3)) \mapsto (t + n, (x_1, x_2, x_3)),$$

   mentre in quello di Y è

$$\mathbb{N} \ni n : (t, (x_1, x_2, x_3)) \mapsto (t + n, ((-1)^n x_1, x_2, x_3)).$$

Dato che M è connesso e semplicemente connesso, è il rivestimento universale sia di X che di Y, e il gruppo fondamentale di entrambi è $\mathbb{Z}$.

Per calcolare i gruppi di omologia di X e Y partiamo da una decomposizione cellulare. Per entrambi questa consta di una 0-cella e_0 corrispondente all'immagine del punto $(0,(0,0,1))$, una 1-cella e_1 corrispondente all'immagine del segmento $]0,1[\times\{(0,0,1)\}$, una 2-cella e_2 corrispondente all'immagine di $\{0\}\times(S^2\setminus\{(0,0,1)\})$, e di una 3-cella e_3 corrispondente all'immagine di $]0,1[\times(S^2\setminus\{(0,0,1)\})$. Gli operatori bordo sono dati, nel caso di X, da

$$\partial_1 e_1 = 0\,,\quad \partial_2 e_2 = 0\,,\quad \partial_3 e_3 = 0\,,$$

e nel caso di Y da

$$\partial_1 e_1 = 0\,,\quad \partial_2 e_2 = 0\,,\quad \partial_3 e_3 = 2e_2\,.$$

Ne segue che

$$H_0(X)\simeq H_1(X)\simeq H_2(X)\simeq H_3(X)\simeq\mathbb{Z}\,,\ H_q(X)=0 \text{ per } q>3\,,$$

$$H_0(Y)\simeq H_1(Y)\simeq\mathbb{Z}\,,\ H_2(Y)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,,\ H_q(Y)=0 \text{ per } q\geq 3\,.$$

(b) No, perchè l'omologia di X è diversa da quella di Y.