**Corso di Introduzione alla Topologia Algebrica - a.a. 2007-08**
*Prova scritta del 6.2.2008*

1. Sia $X$ uno spazio connesso per archi e localmente connesso per archi con gruppo fondamentale finito, e sia $T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ un toro di dimensione $n$. Mostrare che ogni applicazione continua da $X$ a $T$ è omotopa a una applicazione costante.

2. Sia $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ una applicazione continua. Mostrare che $f$ ha almeno un punto fisso.

3. Nell'$\mathbb{R}^3$ euclideo con coordinate ortogonali $xyz$ sia $T$ il toro tracciato facendo ruotare intorno all'asse delle $z$ il cerchio di centro $(3/4, 0, 0)$ e raggio $1/4$ giacente nel piano di equazione $y = 0$. Sia $S^2$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$, e sia $Y$ lo spazio unione di $T$ e del disco $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1/4,\ z = 0\}$. Sia $f : S^2 \to Y$ l'applicazione continua definita come segue. Dato un punto $p$ di $S^2$ si tracci la perpendicolare al piano $z = 0$ passante per $p$; $f(p)$ è definito come il punto di intersezione di questa retta con $Y$ più prossimo a $p$. Poniamo $X = Y \coprod_f D^3$. Calcolare i gruppi di omologia intera di $X$.

*Soluzioni*

1. Sia $f : X \to T$ continua, e sia $\pi : \mathbb{R}^n \to T$ la mappa quoziente. Scegliamo punti base $x_0 \in X$, $t_0 \in T$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ in modo che $f(x_0) = t_0 = \pi(y_0)$. Dato che $\pi_1(T, t_0)$ è un gruppo abeliano libero, non contiene sottogruppi finiti, e quindi $f_*\pi_1(X, x_0) = \{1\}$. Poiché $\pi$ è un rivestimento, il criterio di sollevamento dice allora che esiste un sollevamento di $f$ a una mappa $g : X \to \mathbb{R}^n$ tale che $g(x_0) = y_0$. Poiché $\mathbb{R}^n$ è contraibile, $g$ è omotopa a una mappa costante; lo stesso è dunque vero per $f = \pi g$.

2. Pensiamo $\mathbb{RP}^2$ come quoziente di $S^2$ modulo l'involuzione antipodale $j$, e indichiamo con $\pi : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ la proiezione naturale; questa mappa è un rivestimento universale di $\mathbb{RP}^2$. Vi è un sollevamento $g$ di $f$ ai rivestimenti universali. Dunque il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{RP}^2 \end{tikzcd}$$

Supponiamo che $f$ non abbia punti fissi. Allora anche $g$ non ha punti fissi. Ma è noto che una applicazione di $S^2$ in sè che non abbia punti fissi è omotopa alla mappa antipodale $j$. Dunque $jg$ è omotopa all'identità e quindi ha almeno un punto fisso $x$. D'altra parte $\pi jg = \pi g = f\pi$, e quindi $\pi(x)$ è un punto fisso di $f$, contro l'ipotesi.

3. Descriviamo una decomposizione cellulare di $X$. Lo 0-scheletro è il punto $p = (1/2, 0, 0)$, l'1-scheletro è l'unione di due cerchi $\alpha$ e $\beta$: il primo è il cerchio di centro $(3/4, 0, 0)$ e raggio $1/4$ giacente nel piano di equazione $y = 0$, il secondo il cerchio di raggio $1/2$ centrato nell'origine nel piano $z = 0$. Quindi $X^1$ è ottenuto da $X^0$ attaccando due 1-celle; anche queste vengono indicate con $\alpha$ e $\beta$. Il 2-scheletro è $Y$. Ricordiamo che $T$ è ottenuto da $X^1$ attaccando una 2-cella $\gamma$ con bordo nullo. Pensiamo $X^2$ come ottenuto da $X^1$ attaccando $\gamma$ e il disco

$\eta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1/4,\ z = 0\}$. Diamo nome $\chi$ alla 3-cella che viene attaccata a $Y$ per ottenere $X$. Si vede immediatamente che, con opportuna scelta delle orientazioni,

$$\begin{aligned} &\partial\chi = \gamma\,, \\ &\partial\gamma = 0\,; \quad \partial\eta = \beta\,, \\ &\partial\alpha = \partial\beta = 0\,. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$H^0(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\,, \quad H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\,, \quad H^2(X, \mathbb{Z}) = \{0\}\,, \quad H^3(X, \mathbb{Z}) = \{0\}\,.$$