Scritto di Geometria 2
18/07/2018 - a.a. 2017-2018

Esercizio 1
Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco e biregolare con curvatura k e torsione τ entrambe costanti. Sia $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\beta(s) := \alpha(s) - \frac{1}{k}\mathbf{n}(\mathbf{s})$, dove $\mathbf{n}(\mathbf{s})$ è il versore normale a $\alpha(s)$.

1. Dire se β è regolare e biregolare.
2. Determinare la curvatura e la torsione di β in finzione di k e τ.
3. Mostrare che esistono dei valori dei parametri k e τ per i quali il versore binormale $\mathbf{b}_\beta$ di β coincide con il versore binormale $\mathbf{b}$ di α.
4. Descrivere la traccia di α e quella di β per i valori di k e τ per i quali $\mathbf{b}_\beta = \mathbf{b}$.

Esercizio 2
Sia $\sigma : U := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0,\ v > 0\} \to \mathbb{R}^3,\ \sigma(u,v) = (2u^2, 3uv, v^2)$.

1. Dimostrare che $S := Im(\sigma)$ è una superficie regolare e che σ è una parametrizzazione di S.
2. Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di σ.
3. Sia $a > 0$ un parametro reale positivo e sia $H_a := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = az\}$. Dire se $H_a \cap S$ è una geodetica e se è una linea asintotica.
4. Dire se S è localmente isometrica alla sfera unitaria S^2.

Esercizio 3
Sia X_1 il toro di rivoluzione ottenuto ruotando la circonferenza $C = \{x = 0,\ (y-4)^2 + z^2 = 1\}$ intorno all'asse z. Siano $p_0 = (0,3,0)$, $p = (\frac{8-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}(8-\sqrt{2})}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Siano $X_2 = X_1 \setminus \{p\}$, $X_3 = X_1 \cup S$, dove $S = \{x = 0,\ z = 0,\ |y| \leq 3\}$, $X_4 = C \cup C'$ dove $C' = \{z = 0,\ x^2 + y^2 = 9\}$.

1. Determinare $\pi_1(X_2, p_0)$.
2. Determinare $\pi_1(X_3, p_0)$.
3. Dire se X_2 è omotopicamente equivalente a X_3.
4. Dire se X_2 è omotopicamente equivalente a X_4.