TUTORATO di ALGEBRA LINEARE

16 gennaio 2019

Esercizio 1 (prova del 15-09-2016)

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P, Q e T i punti di coordinate rispettivamente $(3,-2,-1)$, $(1,0,-1)$ e $(4,1,1)$; v_1, v_2 e w i vettori ${}^t(1,1,0)$, ${}^t(2,1,-2)$ e ${}^t(1,0,-2)$; S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-2x+4z=4$.

(a) Trovare il centro C e il raggio R di S. Scrivere le equazioni cartesiane per il piano π passante per P e avente giacitura generata da v_1 e v_2, e per la retta r passante per Q e avente giacitura generata da w.

(b) Determinare le posizioni relative di r e π, di r e S, di π e S. [esterne, tangenti, secanti]

(c) I punti C, P e T sono allineati? Se non lo sono, sia S la retta per C e P: trovare il punto di s più vicino a T e l'area del triangolo CPT.

Esercizio 2 (parte di prova del 20-02-2017)

Siano S_1 e S_2 due sfere di raggio R i cui centri (rispettivamente O_1 e O_2) distano tra loro $6R$. Un punto T giace sul piano passante per il punto O_2 e perpendicolare alla retta contenente O_1 e O_2, a distanza $8R$ da O_2. Esistono (e, nel caso, in numero finito o infinito) sfere tangenti a S_1 e a S_2 che abbiano centro in un punto Q tale che $d(T,Q) \leq 3R$? E se la sfera S_1 avesse raggio $3R$, quale sarebbe la risposta? [esiste ed è unica, esistono in numero infinito]

Esercizio 3 (prove varie)

Dire se è vero o falso che:

(a) se $A \in M(4,\mathbb{R})$ allora $7A + 7{}^tA + I$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(b) esiste $A \in M(4,\mathbb{C})$ tale che $A^*A = 3I$.

(c) esiste $A \in M(4,\mathbb{C})$ tale che $A^*A = -3I$.

(d) per ogni $A \in M(2,\mathbb{R})$ tale che $A^2 + A + I = 0$, A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(e) esiste $A \in M(3,\mathbb{C})$ tale che $A^* = iA$ e $\det(A) = i+1$. Tali A sono tutte diagonalizzabili su $\mathbb{C}$?

(f) esiste $A \in M(3,\mathbb{R})$ tale che $A^6 - A^3 = 0$ e $A \neq I$.

(Si ricorda di dare sempre una motivazione alla propria risposta). [V, V, F, F, V sì, V]

Esercizio 4

Calcolare autovalori e autovettori di $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \in M(4,\mathbb{R})$.

La matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? [sì]

Esercizio 5 (parte di prova del 08-07-2016)

Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & t \\ 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.

[$(2, 2)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$]