ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

Esercizio 1

Si consideri l'applicazione lineare $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dipendente da $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$F_t(1,0,0,0) = (0, -\frac{t}{2}, -2, -\frac{1}{2}) \quad F_t(0,1,0,0) = (2t, 2t, 4, 1)$$

$$F_t(0,0,1,0) = (4, 1, 5t, -1) \quad F_t(0,0,0,1) = (-8t, -4t, 0, -t+3)$$

a) Determinare la matrice A_t associata a F_t nella base ordinata

$$\mathcal{B} := \{(2,0,0,0),\ (2,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,-1)\}$$

b) Dire per quali valori di t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

c) Calcolare autovalori e autovettori di

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ x + y + 3z = k - 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ matrici di rango rispettivamente a e b e sia $C = AB$ di rango c

- verificare che $max(0, a+b-n) \leq c \leq min(a,b)$;
- se $a = n$, verificare che $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$;
- se $a = n$, verificare che $AB = I \Rightarrow B = A^{-1}$;
- sia $g : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ tale che $g(E) = AE - EA$ e si supponga che A abbia n autovalori distinti; mostrare che $dim(ker(g)) \geq n$;
  se invece A ha 2 autovalori distinti di cui uno con molteplicità geometrica $n-1$, mostrare che $dim(ker(g)) \geq n^2 - 2n + 2$;
- sotto l'ipotesi A diagonalizzabile, dimostrare Cayley-Hamilton per A.