ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1 e P_2 i punti di coordinate rispettivamente $(4,5,3)$, $(6,6,1)$; C e Q i punti di coordinate rispettivamente $(1,2,3)$ e $(-1,4,2)$; inoltre, sia s la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - z = -8 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

- scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e P_2, il piano π passante per Q e contenente la retta s e per la sfera S con centro nel punto C e raggio 6;
- determinare le posizioni relative di r e S, di π e S, di r e s.

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dipendente da $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$F_t(1,1,0,0) = (2t, -t, 3t-2, 0) \quad F_t(2,1,0,0) = (3t, -t, 5t-2, 0)$$

$$F_t(1,1,-1,0) = (t-1, -t, 3t-2, 0) \quad F_t(0,1,-1,1) = (5t-1, -t, 3t-2, -t)$$

a) determinare la matrice A_t associata a F_t nelle basi canoniche;

b) dire per quali valori di t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

c) calcolare autovalori e autovettori di A_{-1};

d) calcolare al variare di t la segnatura di

$$B_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 2 & -2 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

- Dimostrare che esiste una matrice invertibile $B \in M(3, \mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.
- Dire se è vero o falso che $A - {}^tCC$ è definita positiva per ogni matrice C di ordine 3 a coefficienti reali.
- Dire se è vero o falso che $-2iA - i({}^tCC)$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ per ogni matrice C di ordine 3 a coefficienti reali.
- Dire se è vero o falso che $-2iA - i({}^tCC)$ ha almeno un autovalore reale per ogni matrice C di ordine 3 a coefficienti reali.