Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019
Prova scritta del 21.1.2019
COMPITO **A**

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso C, P, Q e R i punti di coordinate rispettivamente $(\frac{3}{2}, 1, -3)$, $(1, 0, -1)$ e $(2, 1, -3)$; $(0, 0, -2)$; w_1, w_2 i vettori rispettivamente ${}^t(1, 1, 1)$, ${}^t(2, 1, 1)$;

(1) Determinare equazioni cartesiane per il piano Π per P con giacitura $W := \langle w_1, w_2 \rangle$, per la retta r passante per Q e R e per la sfera S di centro C e raggio $\frac{1}{4}$.
(2) Determinare la posizione relativa di Π e r e di r e S.
(3) Determinare un punto di minima distanza di r da S e dire se è unico.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $F_t(1, 1, 0) = (-t-1, -t, -t)$ $F_t(1, 0, 2) = (-t+2, -t, 1)$, $F_t(-t, 1, -2t) = (t^2-2t-1, t^2, -2t-1)$.

(1) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
(2) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0.

Punti (3+5+3)

Esercizio 3

(1) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & t^2-1 & 0 & 0 \\ -t & 0 & -t & t \\ 0 & 0 & t & -t \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.
(2) Dire per quali valori di t esistono dei vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$ tali che ${}^t v B_t v = 0$.
(3) Dire se esistono dei valori di t per cui esiste un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ di dimensione almeno 2 tale che $\forall v, w \in U$, ${}^t v B_t w = 0$.

Punti: (5+1+1)

Esercizio 4

Siano A una matrice reale di ordine 3 invertibile tale che $A{}^tA$ sia diagonale.
Vero o Falso:

(1) A è matrice ortogonale
(2) ${}^tAA$ è simile AA^t .

Punti: (1+1)

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019
Prova scritta del 21.1.2019
COMPITO **B**

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso C, P, Q e R i punti di coordinate rispettivamente $(2,-\frac{1}{2},3)$, $(2,0,-1)$ e $(2,-1,3)$; $(7,-3,1)$; w_1, w_2 i vettori rispettivamente ${}^t(-1,-1,-1)$, ${}^t(3,1,1)$;

(1) Determinare equazioni cartesiane per il piano Π per P con giacitura $W := \langle w_1, w_2 \rangle$, per la retta r passante per Q e R e per la sfera S di centro C e raggio $\frac{1}{4}$.
(2) Determinare la posizione relativa di Π e r e di r e S.
(3) Determinare un punto di minima distanza di r da S e dire se è unico.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2.

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $F_t(1,1,0) = (t-1,t,t)$ $F_t(1,0,2) = (t+2,t,1)$, $F_t(t,1,2t) = (t^2+2t-1,t^2,2t-1)$.

(1) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
(2) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0.

Punti: (4+5+3)

Esercizio 3

(1) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & t(t^2-3) & 0 & 0 \\ -t & 0 & -t & t \\ 0 & 0 & t & -t \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.
(2) Dire per quali valori di t esistono dei vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$ tali che ${}^t v B_t v = 0$.
(3) Dire se esistono dei valori di t per cui esiste un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ di dimensione almeno 2 tale che $\forall v, w \in U$, ${}^t v B_t w = 0$.

Punti: (5+1+1)

Esercizio 4

Siano A una matrice reale di ordine 3 invertibile tale che A^tA sia diagonale. *Vero o Falso*:

(1) ${}^tAA$ è simmetrica definita positiva
(2) ${}^tAA$ è simile AA^t .

Punti: (1+1)

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019
Prova scritta del 21.1.2019
COMPITO **C**

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso C, P, Q e R i punti di coordinate rispettivamente $(-3, \frac{3}{2}, -1)$, $(1, 3, 2)$ e $(-3, 2, -1)$; $(-1, 3, 0)$; w_1, w_2 i vettori rispettivamente ${}^t(4, 7, -3)$, ${}^t(3, 5, -2)$;

(1) Determinare equazioni cartesiane per il piano Π per P con giacitura $W := \langle w_1, w_2 \rangle$, per la retta r passante per Q e R e per la sfera S di centro C e raggio $\frac{1}{4}$.
(2) Determinare la posizione relativa di Π e r e di r e S.
(3) Determinare un punto di minima distanza di r da S e dire se è unico.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $F_t(1, 1, 0) = (-t+1, -t, -t)$ $F_t(1, 0, 2) = (-t-2, -t, -1)$, $F_t(t, 1, 2t) = (-t^2-2t+1, -t^2, 1-2t)$.

(1) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
(2) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0.

Punti: (4+5+3)

Esercizio 3

(1) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & t^2-2 & 0 & 0 \\ -t & 0 & -t & t \\ 0 & 0 & t & -t \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.
(2) Dire per quali valori di t esistono dei vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$ tali che ${}^tvB_tv = 0$.
(3) Dire se esistono dei valori di t per cui esiste un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ di dimensione almeno 2 tale che $\forall v, w \in U$, ${}^tvB_tw = 0$.

Punti: (5+1+1)

Esercizio 4.

Siano A una matrice reale di ordine 3 e rango 3 tale che A^tA sia diagonale.
Vero o Falso:

(1) ${}^tAA + I$ è simmetrica definita positiva
(2) ${}^tAA + I$ può essere simile a $A^tA - I$.

Punti: (1+1)

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019
Prova scritta del 21.1.2019
COMPITO **D**

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso C, P, Q e R i punti di coordinate rispettivamente $(-2, \frac{1}{2}, 3)$, $(0, 0, 3)$ e $(-2, 1, 3)$; $(-1, 3, 2)$; w_1, w_2 i vettori rispettivamente ${}^t(1, 5, -4)$, ${}^t(-1, -2, 1)$;

(1) Determinare equazioni cartesiane per il piano Π per P con giacitura $W := \langle w_1, w_2 \rangle$, per la retta r passante per Q e R e per la sfera S di centro C e raggio $\frac{1}{4}$.
(2) Determinare la posizione relativa di Π e r e di r e S.
(3) Determinare un punto di minima distanza di r da S e dire se è unico.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $F_t(1, 1, 0) = (t + 1, t, t)$ $F_t(1, 0, 2) = (t - 2, t, -1)$, $F_t(-t, 1, -2t) = (-t^2 + 2t + 1, -t^2, 1 + 2t)$.

(1) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
(2) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0.

Punti: (4+5+3)

Esercizio 3

(1) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & t(t^2-2) & 0 & 0 \\ -t & 0 & -t & t \\ 0 & 0 & t & -t \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.
(2) Dire per quali valori di t esistono dei vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$ tali che ${}^tvB_tv = 0$.
(3) Dire se esistono dei valori di t per cui esiste un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ di dimensione almeno 2 tale che $\forall v, w \in U$, ${}^tvB_tw = 0$.

Punti: (5+1+1)

Esercizio 4

Siano A una matrice reale di ordine 3 e rango 3 tale che $A{}^tA$ sia diagonale.
Vero o Falso:

(1) ${}^tAA + I$ è simmetrica definita positiva
(2) ${}^tAA + I$ è simile $A\,{}^tA + I$.

Punti: (1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2018-2019

Prova scritta del 21.1.2019 Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 3

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 4 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F

(2) V F

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & 0 \end{pmatrix}$$