

**Corso di Algebra 1 - a.a. 2020-2021**

*Prova scritta del 15.09.2021*

**Esercizio 1**

Consideriamo il gruppo  $G = D_8$  e sia  $Z$  il centro di  $G$ .

1. Dire se  $G/Z$  è isomorfo a  $D_4$ .
2. Dimostrare che esiste un sottogruppo normale  $H$  di  $G$  isomorfo a  $D_4$  tale che  $H$  contiene  $Z$ .
3. Dimostrare che  $H/Z$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Esercizio 2**

Siano  $p = X^3 + 3X + 6$ ,  $q = X^5 + 3X^3 + 6X^2 - 3 \in \mathbb{Z}[X]$ .

1. Dire se  $\mathbb{Z}[X]/(p)$  è un dominio di integrità e/o un campo.
2. Dire se  $(p)$  e  $(q)$  sono coprimi come ideali in  $\mathbb{Q}[X]$ .
3. Determinare un generatore per l'ideale  $(p) \cap (q)$  in  $\mathbb{Q}[X]$ .