

Corso di Algebra 1 - a.a. 2020-2021

Prova scritta del 25.01.2021

Esercizio 1

Sia G un gruppo non banale tale che $\forall x \in G, x$ e x^{-1} sono coniugati.

1. Supponendo che G sia abeliano, determinare l'ordine degli elementi di G e dimostrare che se esiste un omomorfismo iniettivo

$$\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},$$

allora $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Supponendo $\#G = 4$, dare un esempio di un omomorfismo non banale $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
3. Dare un esempio di un gruppo G non abeliano con questa proprietà (cioè tale che $\forall x \in G, x$ e x^{-1} sono coniugati).

Esercizio 2

Sia $f = X^5 + 35X^3 + 21X + 28 \in \mathbb{Z}[X]$ e sia $I = (f) \subset \mathbb{Z}[X]$.

1. Dire se I è primo.
2. Dire se I è massimale.
3. Fattorizzare in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ il polinomio \bar{f} ottenuto riducendo i coefficienti di f modulo 2.