

1. [8 punti] Determinare quali valori reali di x soddisfano la disuguaglianza

$$2^{x^2-x+2} \geq 4.$$

$$x \leq 0 \cup x \geq 1$$

~~2^{x^2-x+2} \geq 4~~

2. [8 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3} dx.$$

$\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

3. [8 punti] Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln(x^2 + 3)$$

nel suo punto di ascissa 0 (scrivere il risultato nella forma $y = mx + q$).

$y = \ln 3$

4. [8 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

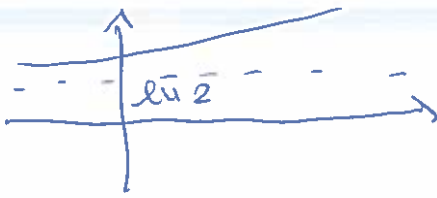
$$\begin{cases} 3y'(x) + \frac{9}{4}y(x) = 0 \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

$y(x) = 3e^{-\frac{3}{4}x}$

Spazio riservato alla commissione

Punti: 1. 2. 3. 4.

Tot.



5. [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \ln(e^x + 2)$$

- a) precisare il dominio e discutere il segno; $D_f = \mathbb{R}$, seu pre tutti pos.
- b) calcolare i limiti agli estremi del dominio; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 2$
- c) studiare crescita, decrescenza ed estremi relativi; $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$
 f è in crescita
- d) studiare concavità, convessità e flessi;
- e) tracciarne il grafico. $f''(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 2)^2}$ f " concavo

6. [8 punti] Una sostanza radioattiva ha tempo di dimezzamento di 1500 anni (cioè dopo 1500 anni una quantità iniziale si dimezza).

Calcolare la percentuale ancora presente dopo 150 anni.

$$y(t) = y(0)e^{kt}, \quad y(1500) = \frac{1}{2}y(0) = y(0)e^{k \cdot 1500} \quad 1500k = \ln\left(\frac{1}{2}\right), \quad k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) / 1500$$

$$y(150) = y(0)e^{k \cdot 150} \sim \frac{x}{100} \rightarrow x \text{ è la percentuale}$$

7. [8 punti] Rappresentare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$z = 4x \quad y = 10^{4x} \quad y = 10 \cdot 10^{6x} \quad z = 6x + 1$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogy (in base 10) è la retta $x + 2z + 1 = 0$.

$$z = \frac{-x-1}{2}, \quad y = 10^{\frac{-x-1}{2}}$$

8. [8 punti] Dati 10 litri di una soluzione concentrata al 20%, calcolare quanti litri di ~~soluto~~ ^{SOLVENTE} è necessario aggiungere per ottenere una soluzione concentrata al 15%.

10/3

Spazio riservato alla commissione

Punti: 5. 6. 7. 8.

Tot.