

Matricola \_\_\_\_\_ Cognome e Nome \_\_\_\_\_ VOTO: \_\_\_\_\_

A1. [8 punti] Trovare per quali  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$\frac{\ln(x^2 - 1)}{e^{x^2} - e^5} \geq 0. \quad \boxed{\phantom{000000}}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup [-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}] \cup (\sqrt{5}, +\infty)$$

A2. [8 punti]

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3y'(x) + 3y(x) - 2 = 0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3}$$

A3. [8 punti] RIPORTARE PROCEDIMENTO E SOLUZIONE SU FOGLIO ALLEGATO

Dati 90 litri di una soluzione concentrata al 60%, calcolare quanti litri di solvente si devono aggiungere per ottenere una soluzione concentrata al 45%.  $\boxed{30}$

A4. [8 punti]

Date le funzioni  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = e^x$ , determinare la funzione composta  $h(x) = (f \circ g)(x)$ .

$$h(x) = \sin(e^x)$$

Calcolare il polinomio di Taylor di centro  $x_0 = 0$  e ordine 2 di  $h$ .  $\boxed{\phantom{000000}}$

$$p_2(x) = \sin 1 + (\cos 1)x + \frac{\cos 1 - \sin 1}{2} x^2$$

A5. [8 punti] RIPORTARE PROCEDIMENTO E SOLUZIONE SU FOGLIO ALLEGATO

Una popolazione che evolve con legge di crescita esponenziale si riduce al 5 % (di una data quantità iniziale) in 10 anni. Sapendo che dopo 20 anni sono presenti 20 individui, calcolare il numero di individui presenti all'istante iniziale.  $\boxed{\phantom{000000}}$

$$k = \frac{1}{10} \ln \left( \frac{1}{20} \right), \quad y(0) = 8000$$

A6. [8 punti]

Data la funzione  $f(x) = 6x^5 e^{-x^6} + x^6$ , determinare la funzione

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt \quad \boxed{-e^{-x^6} + 1 + \frac{x^7}{7}}$$

e calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \quad \boxed{+\infty}$$

A7. [8 punti] RIPORTARE PROCEDIMENTO E SOLUZIONE SU FOGLIO ALLEGATO

Determinare l'espressione in scala semilogy (in base 10) della seguente legge esponenziale  $y(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$  e tracciare un grafico qualitativo di tale espressione.  $z = \left(\log \frac{1}{5}\right) x + \log 4$

Determinare poi l'espressione  $y = f(x)$  della funzione che in scala loglog (in base 10) è rappresentata da  $z = 4w - 3$ .

$$y = 10^{-3} \cdot x^4$$

A8. [10 punti] RIPORTARE PROCEDIMENTO E SOLUZIONE SU FOGLIO ALLEGATO

Data la funzione  $f(x) = \left| \frac{e^{-x^2} + 3}{e^{-x^2} - 1} \right|$ , determinare:

- . Campo di esistenza  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- . Segno  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D_f$
- . Limiti agli estremi del campo di esistenza  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = +\infty$
- . Eventuali punti stazionari non ci sono punti stazionari
- . Grafico qualitativo della funzione

