

Matricola

Cognome e Nome

VOTO:

A1. [10 punti] RIPORTARE PROCEDIMENTO E SOLUZIONE SU FOGLIO ALLEGATO

Data la funzione $f(x) = |e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x/2}|$, determinare:

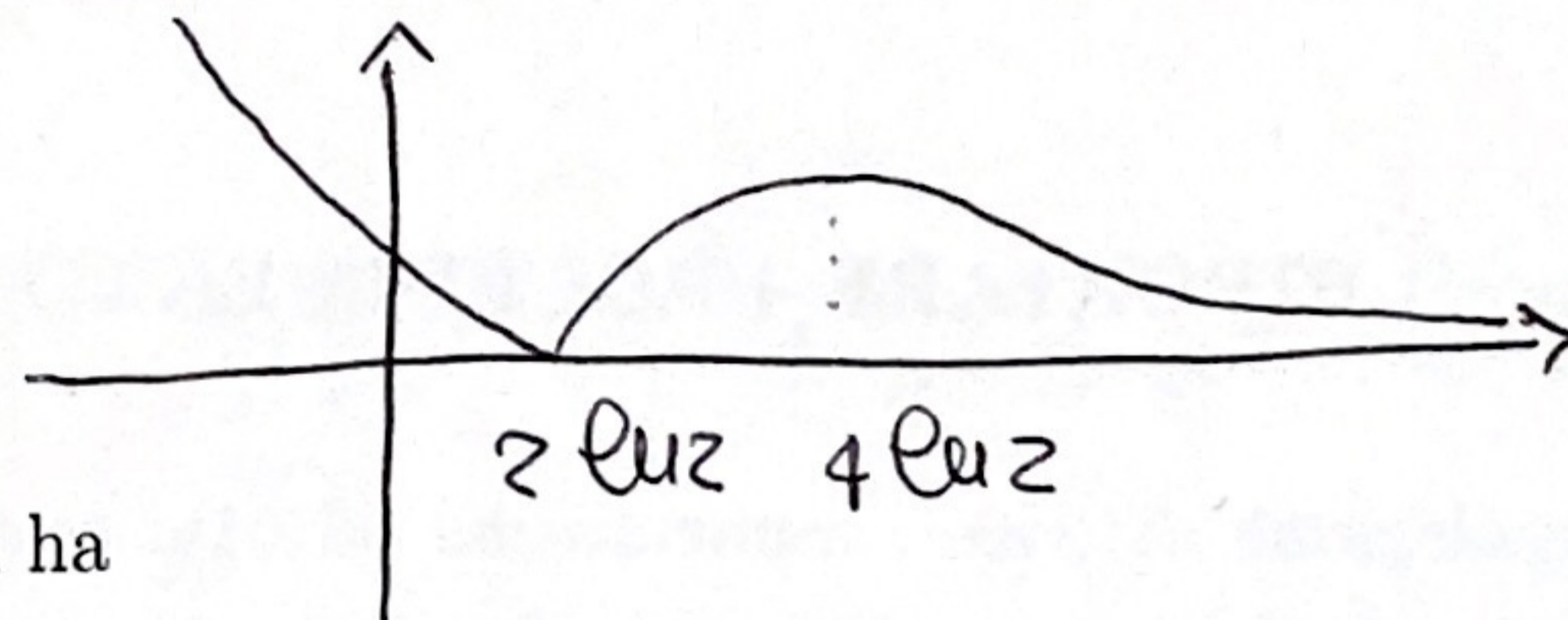
. Campo di esistenza \mathbb{R}

. Segno $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

. Limiti agli estremi del campo di esistenza $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

. Eventuali punti stazionari $\bar{x} = 4 \ln 2$ (punto di massimo)

. Grafico qualitativo della funzione



A2. [8 punti] Trovare per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\ln \left(\frac{1 - e^{-2x}}{2 - e^{-2x}} \right) \geq 0.$$

$x < -\frac{1}{2} \ln 2$

A3. [8 punti] RIPORTARE PROCEDIMENTO E SOLUZIONE SU FOGLIO ALLEGATO

Determinare l'espressione in scala log log in base 10 della seguente legge potenza $y(x) = 2x^{-2}$ e tracciare un grafico qualitativo di tale espressione. $z = \log z - 2w$

Determinare poi l'espressione $y = f(x)$ della funzione che in scala semilogy (in base 10) è rappresentata da $z = 2w - 2$. $y = 10^{2x} \cdot 10^{-2}$

A4. [8 punti]

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 2y(x) - 3 = 0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$y(x) = \frac{5}{2} e^{2x} - \frac{3}{2}$

A5. [8 punti]

Data la funzione $f(x) = -2xe^{-x^2} \cos(e^{-x^2})$, determinare la funzione

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt = \boxed{\sin(e^{-x^2}) - \sin(1)}$$

e calcolare $\int_0^1 f(x) dx$

$$\boxed{\sin(e^{-1}) - \sin(1)}$$

A6. [8 punti]

Data la funzione $f(x) = 1 + x + \frac{\sin x^2}{x^2}$, determinare il polinomio di Taylor di centro $x_0 = \sqrt{\pi}$ e

ordine 2 di f .
$$\boxed{P_2(x) = 1 + x - \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x - \sqrt{\pi}) + \frac{3}{\pi}(x - \sqrt{\pi})^2}$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$
$$\boxed{y = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)x + 3}$$

A7. [8 punti] **RIPORTARE PROCEDIMENTO E SOLUZIONE SU FOGLIO ALLEGATO**

Una popolazione di criceti aumenta del 50 ogni settimana. Indichiamo con $N(i)$ il numero di criceti alla fine della i -esima settimana. Sapendo che

$$\frac{N(1) + N(2)}{2} = 15$$

calcolare il numero di criceti all'inizio della prima settimana.

$\boxed{8}$

A8. [8 punti] **RIPORTARE PROCEDIMENTO E SOLUZIONE SU FOGLIO ALLEGATO**

Una colonia batterica che evolve con legge di crescita esponenziale aumenta del 10 % (rispetto ad una data quantità iniziale) in 3 minuti. Calcolare, quanto tempo (in minuti) occorre perchè il numero di individui aumenti del 5%.

$$\boxed{k = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{11}{10}\right), T = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{21}{20}\right)}$$