Induzione, medie, disuguaglianze

1. Notazioni e richiami

Perché queste pagine abbiamo una certa dose di autosufficienza è opportuno fissare alcune notazioni e richiamare alcune nozioni e alcuni risultati che utilizzeremo.

1.1. Insiemi numerici, minimo e massimo. Denotiamo con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi e con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, cioè degli interi non negativi. Denotiamo poi con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.

Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, diciamo che un numero reale m è il minimo (rispettivamente il massimo) di A se $m \in A$ e $m \le x$ (rispettivamente $m \ge x$) per ogni $x \in A$. Il minimo e il massimo di A esistono senz'altro quando A è non vuoto e possiede un numero finito di elementi, mentre possono esistere o meno se A è infinito. In ogni caso, quando esistono, essi sono unici e vengono denotati con $\min A$ e $\max A$ rispettivamente.

1.2. Proposizioni. Con il termine *proposizione* si intende una frase p che è vera o falsa. Questa affermazione è vaga, ma in questa sede ci si deve accontentare. Essa significa innanzi tutto che ha senso chiedersi se p è vera o falsa (in una situazione di linguaggio ordinario p non può essere, ad esempio, un'esclamazione o una domanda; in una situazione matematica p deve avere senso compiuto, ad esempio ogni parentesi aperta deve essere prima o poi chiusa). In secondo luogo, la risposta alla domanda "p è vera o falsa?" deve essere univoca e non dipendere da circostanze particolari, ad esempio da chi risponde. Notiamo che non si richiede di sapere *se* la risposta è "sì" oppure "no" ma solo di sapere *che* la risposta è "sì" oppure "no".

Ad esempio è una proposizione la seguente: Mario (una persona precisa) ieri è andato al mare. Carlo può non saper se Mario è andato al mare o meno, ma è chiaro che Mario è andato al mare oppure no, e il fatto è oggettivo.

Nel caso di frasi espresse in linguaggio matematico abbiamo proposizioni quando non compaiono parametri liberi, cioè suscettibili di assumere diversi valori, che possono condizionare la risposta alla domanda.

Ad esempio $2 \le 3$ è una proposizione (vera), mentre $x \le 3$ non lo è, a causa della presenza del parametro x. Tuttavia ogni scelta concreta di x porta a una proposizione (talora vera, talora falsa). Infine la frase "ogni numero reale $x \ge 1$ verifica $x \le 2$" è una proposizione (falsa) anche se contiene il parametro x, dato che x, *quantificato* dalla presenza di "ogni", non può essere sostituito da valori precisi.

Concludiamo questa sezione con un richiamo sul significato di *implicazione*. Se p e q sono due proposizioni, la proposizione "p implica q" *è falsa se e solo se* p *è vera e* q *è falsa*. In particolare ogni implicazione costruita con due proposizioni false è vera.

1.3. Disuguaglianze elementari. Il lettore è certamente abituato a usare le disuguaglianze, sia strette $(>, <)$ sia larghe $(\ge, \le)$, nell'ambito dei numeri reali. In questa sede ci limitiamo a ribadire qualche implicazione di uso particolarmente frequente, considerando, per fissare le idee, il caso delle disuguaglianze strette.

$$\begin{aligned} x<y \quad & \text{implica} \quad -y<-x \\ 0<x<y \quad & \text{implica} \quad \frac{1}{y}<\frac{1}{x} \\ x_1<y_1 \quad e \quad x_2<y_2 \quad & \text{implicano} \quad x_1+x_2<y_1+y_2 \\ 0<x_1<y_1 \quad e \quad 0<x_2<y_2 \quad & \text{implicano} \quad x_1x_2<y_1y_2. \end{aligned}$$

1.4. Potenze a esponente reale. Al lettore è senz'altro familiare la nozione di potenza di base a reale qualunque non nulla e esponente $n \in \mathbb{Z}$. Nel caso in cui la base a è *positiva* si può parlare di potenza a^x con esponente x reale qualunque, la definizione (che qui non riportiamo) essendo data in modo che la potenza a^x sia *sempre positiva* e conservi il suo significato abituale quando x è un intero. Anche nel caso di esponenti reali valgono le proprietà usuali, vale a dire

$$a^{x+y}=a^x a^y, \qquad (a^x)^y=a^{xy}, \qquad (ab)^x=a^x b^x.$$

In particolare, da $a^{-x}a^x=a^0=1$ e $(a^{1/n})^n=a^1=a$, seguono le relazioni

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x} \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad e \qquad a^{1/n}=\sqrt[n]{a} \quad (n=2,3,\ldots).$$

Abbiamo ad esempio $1/\sqrt{5^3}=5^{-3/2}$. Importanti sono poi alcune implicazioni

$$\begin{aligned} a<b \quad e \quad x>0 \quad & \text{implicano} \quad a^x<b^x \\ a<b \quad e \quad x<0 \quad & \text{implicano} \quad a^x>b^x \\ a>1 \quad e \quad x<y \quad & \text{implicano} \quad a^x<a^y. \\ a<1 \quad e \quad x<y \quad & \text{implicano} \quad a^x>a^y. \end{aligned}$$

Si consente infine alla base a di essere 0 purché l'esponente sia *positivo*, ponendo $0^x=0$ per ogni $x>0$.

1.5. Successioni e n-uple. Il termine *successione* denota una legge che a ogni numero naturale associa un elemento di un certo insieme. Parliamo di successione di elementi di I se I è l'insieme in questione. Possiamo dunque avere, ad esempio, successioni di numeri reali o successioni di sottoinsiemi di un dato insieme. Fissato un simbolo, diciamo x, che decidiamo di usare quando intendiamo riferirci a una successione precisa, la successione in questione verrà indicata con $\{x_n\}$. Con questo simbolo resta inteso che la successione è la legge che al numero naturale n associa l'elemento x_n, ciò per ogni numero naturale n.

Dunque a 0 viene associato x_0, a 1 viene associato x_1, eccetera. Risulta allora chiaro che la scelta del nome n attibuito all'indice è inessenziale: possiamo usare un altro simbolo e denotare la stessa successione, ad esempio, con $\{x_k\}$. Invece il simbolo $\{y_k\}$ denoterebbe in generale una successione diversa.

Se n è un numero naturale ≥ 1, il termine n-upla denota una legge che a ogni numero naturale k verificante $1 \leq k \leq n$ associa un elemento di un certo insieme. Una n-upla è dunque un elenco ordinato di n oggetti, distinti o meno. Anziché di 2-uple, 3-uple, eccetera si parla di coppie, terne, eccetera. Una generica n-upla viene indicata con simboli del tipo $(x_1, \ldots, x_n)$, restando inteso che la n-upla in questione è la legge che al numero k associa l'elemento x_k, ciò per $k = 1, \ldots, n$. Per n-uple precise e per valori bassi di n si possono elencare ordinatamente gli oggetti. Ad esempio $(4, 7, 4)$ è la terna che a $1, 2, 3$ associa $4, 7, 4$ rispettivamente.

Siano ora $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ due n-uple di oggetti qualunque. Diciamo che la seconda è un *riordinamento* (o una permutazione) della prima quando i suoi elementi si ottengono rielencando quelli della prima n-upla eventualmente in ordine diverso o, più precisamente, quando esiste una n-upla $(k_1, \ldots, k_n)$ di numeri interi che verifica le condizioni seguenti: (i) ogni numero naturale k verificante $1 \leq k \leq n$ si può scrivere nella forma k_i per uno e un solo numero naturale i verificante $1 \leq i \leq n$; (ii) risulta $y_i = x_{k_i}$ per $i = 1, \ldots, n$. Ad esempio la terna $(4, 4, 7)$ è un riordinamento della terna $(4, 7, 4)$. Con le notazioni della definizione abbiamo infatti $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, $x_3 = 4$, $y_1 = 4$, $y_2 = 4$ e $y_3 = 7$, per cui possiamo prendere $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 2$. In questo caso si può prendere anche $k_1 = 3$, $k_2 = 1$ e $k_3 = 2$. La n-upla $(k_1, \ldots, k_n)$ è invece unica quando gli elementi $x_1, \ldots, x_n$ sono tutti distinti fra loro. Facciamo notare che ogni n-upla è un riordinamento di se stessa, che ogni riordinamento di un riordinamento è esso stesso un riordinamento e che ogni n-upla è un riordinamento di ogni suo riordinamento.

2. Principio di induzione

Esso è il teorema che enunciamo tra breve e riguarda la verità di una successione di proposizioni. Il suo uso è frequentissimo in tutti i rami teorici della matematica.

Deduciamo il Principio di induzione da una proprietà importante dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, proprietà che enunciamo come teorema senza dimostrazione, osservando però che essa è un teorema oppure un assioma a seconda dell'impostazione teorica di $\mathbb{N}$ che si vuole adottare.

Teorema 2.1. *Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha minimo.*

Teorema 2.2. *Sia $\{p_n\}$ una successione di proposizioni verificante le due condizioni seguenti:*

$$p_0 \text{ è vera} \tag{2.1}$$

$$\text{per ogni } n \text{, la proposizione } p_n \text{ implica la proposizione } p_{n+1}. \tag{2.2}$$

Allora per ogni n la proposizione p_n è vera.

Dimostrazione. Sia A l'insieme costituito dai numeri naturali n tali che p_n è falsa. Dobbiamo dimostrare che A è vuoto. Ragionando per assurdo, supponiamo A non vuoto. Allora possiamo applicare il Teorema 2.1. Sia $m = \min A$. Siccome $0 \notin A$ per (2.1), abbiamo che $m - 1$ è ancora un numero naturale e, per definizione di m, risulta $m \in A$ e $m - 1 \notin A$. Dunque p_{m-1} è vera e p_m è falsa. Ma ciò contraddice la (2.2), applicata con $n = m - 1$. ∎

Tutte le volte che si vuole usare il principio di induzione occorre dunque decidere che cosa chiamare p_n e controllare le condizioni (2.1) e (2.2). Il secondo controllo consiste nella dimostrazione di un teorema, nel quale p_n è l'ipotesi e p_{n+1} è la tesi. In questo contesto, p_n è detta *ipotesi di induzione*. Notiamo infine che si usa dire che *si ragiona per induzione su* n specialmente nel caso in cui, oltre a n, intervengono altri parametri.

2.3. Varianti. Il Principio di induzione ha diverse varianti, tutte quante chiamate ancora Principio di induzione: ne indichiamo due. La più semplice riguarda il caso in cui la proposizione iniziale vera non sia p_0 ma un'altra, diciamo p_5. In questo caso possiamo concludere che sono vere tutte le p_n con $n \geq 5$ e l'ipotesi (2.2) può essere indebolita richiedendo che p_n implichi p_{n+1} per ogni $n \geq 5$ anziché per ogni n.

La seconda variante che riteniamo doveroso segnalare è la seguente: la conclusione è ancora corretta se, ferma restando l'ipotesi (2.1), la (2.2) viene sostituita dalla seguente: per ogni n l'assunzione di tutte le proposizioni p_k con $k \leq n$ implica p_{n+1}. Abbiamo cioè, in alternativa a (2.2), la famiglia di ipotesi

la proposizione p_0 implica la proposizione p_1
la proposizione (p_0 e p_1) implica la proposizione p_2
la proposizione (p_0 e p_1 e p_2) implica la proposizione p_3

eccetera. ∎

Usiamo il Principio di induzione per dimostrare un risultato di ottimizzazione, usualmente riassunto nelle parole *disuguaglianze di riordinamento* (*re-arrangement* in inglese).

Teorema 2.4. *Siano* $(c_1, \ldots, c_n)$ *e* $(x_1, \ldots, x_n)$ *due* n*-uple di numeri reali e si supponga che* $c_1 \leq \ldots \leq c_n$. *Sia inoltre* $(y_1, \ldots, y_n)$ *un riordinamento di* $(x_1, \ldots, x_n)$. *Nell'ipotesi che* $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ *vale la disuguaglianza*

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geq c_1y_1 + \ldots + c_ny_n \tag{2.3}$$

mentre la disuguaglianza opposta

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \leq c_1y_1 + \ldots + c_ny_n. \tag{2.4}$$

vale nell'ipotesi che $x_1 \geq \ldots \geq x_n$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima parte ragionando per induzione su n, la proposizione p_n essendo: vale la (2.3) per ogni coppia di n-uple $(c_1, \ldots, c_n)$ e $(x_1, \ldots, x_n)$ verificanti le condizioni richieste e per ogni riordinamento $(y_1, \ldots, y_n)$ di $(x_1, \ldots, x_n)$.

Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo ora $n \geq 1$, usiamo p_n come ipotesi di induzione e dimostriamo p_{n+1}. Siano dunque $(c_1, \ldots, c_{n+1})$ e $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ due $(n{+}1)$-uple verificanti $c_1 \leq \ldots \leq c_{n+1}$ e $x_1 \leq \ldots \leq x_{n+1}$ e sia $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ un riordinamento di $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Dobbiamo dimostrare che vale la disuguaglianza

$$c_1x_1 + \ldots + c_{n+1}x_{n+1} \geq c_1y_1 + \ldots + c_{n+1}y_{n+1}. \tag{2.5}$$

Distinguiamo due casi. Nel primo supponiamo $y_{n+1} = x_{n+1}$. In tal caso applichiamo l'ipotesi di induzione alle tre n-uple $(c_1, \ldots, c_n)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ e abbiamo

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geq c_1y_1 + \ldots + c_ny_n.$$

Sommando ai due membri rispettivamente $c_{n+1}x_{n+1}$ e $c_{n+1}y_{n+1}$, che sono uguali, otteniamo la (2.5).

Supponiamo ora $y_{n+1} \neq x_{n+1}$. Siccome per ipotesi $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ è un riordinamento di $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, possiamo trovare i e j tali che $x_{n+1} = y_i$ e $y_{n+1} = x_j$. Siccome $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ abbiamo $i \neq n+1$ (e $j \neq n+1$), per cui risulta ben definita la $(n{+}1)$-upla $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ individuata dalle condizioni

$$z_i = y_{n+1}, \qquad z_{n+1} = y_i \qquad e \qquad z_k = y_k \quad \text{per } k \text{ diverso da } i \text{ e } n+1\,.$$

Allora la (2.5) seguirà dalle due disuguaglianze

$$\begin{aligned} c_1x_1 + \ldots + c_{n+1}x_{n+1} &\geq c_1z_1 + \ldots + c_{n+1}z_{n+1} \\ c_1z_1 + \ldots + c_{n+1}z_{n+1} &\geq c_1y_1 + \ldots + c_{n+1}y_{n+1} \end{aligned}$$

che ora dimostriamo, iniziando dalla seconda. Osserviamo che

$$(c_{n+1} - c_i)(x_{n+1} - x_j) \geq 0$$

grazie alle ipotesi $c_1 \leq \ldots \leq c_n$ e $x_1 \leq \ldots \leq x_n$. Deduciamo

$$c_{n+1}x_{n+1} + c_ix_j \geq c_{n+1}x_j + c_ix_{n+1}.$$

Ma per costruzione $x_{n+1} = y_i = z_{n+1}$, $x_j = y_{n+1} = z_i$, $x_j = y_{n+1}$ e $x_{n+1} = y_i$. La disuguaglianza si riscrive dunque come

$$c_{n+1}z_{n+1} + c_iz_i \geq c_{n+1}y_{n+1} + c_iy_i.$$

Sommando al primo membro tutti i termini c_kz_k con $k \neq i, n+1$ e al secondo i termini c_ky_k con $k \neq i, n+1$, che sono ordinatamente uguali ai precedenti, otteniamo la disuguaglianza voluta. Passiamo allora alla prima disuguaglianza. Osserviamo innanzi tutto che, grazie al fatto che, oltre a $i \neq n+1$, si ha $j \neq n+1$, la $(n{+}1)$-upla $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ è un riordinamento di $(y_1, \ldots, y_{n+1})$, dunque anche di $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Inoltre $z_{n+1} = x_{n+1}$ per costruzione. Quindi la disuguaglianza da dimostrare rientra nel primo caso. Ciò completa la verifica della (2.5) e, dunque, la dimostrazione della (2.3).

Per dimostrare la (2.4), applichiamo la (2.3), che ormai è stata dimostrata, alle n-uple $(c_1, \ldots, c_n)$, $(-x_1, \ldots, -x_n)$ e $(-y_1, \ldots, -y_n)$ osservando che, effettivamente, la (2.3) è applicabile. Cambiando poi i segni nella disuguaglianza ottenuta, abbiamo la (2.4). ∎

3. Convessità

La convessità è una proprietà geometrica delle funzioni reali di variabile reale. D'altra parte la sua definizione analitica ha come conseguenza un buon numero di disuguaglianze. Premettiamo una definizione.

Definizione 3.1. *Un sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{R}$ *è detto intervallo quando gode della proprietà seguente: per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali che* $x < y < z$ *, da* $x, z \in I$ *segue* $y \in I$ *.*

Si richiede dunque che ogni punto compreso fra due punti di I appartenga esso stesso a I . Nella rappresentazione geometrica dei numeri reali, quindi, un intervallo è l'intera retta reale, oppure una semiretta (estremo compreso o meno), oppure un segmento (estremi compresi o meno), oppure un insieme ridotto a un solo punto.

In vista della definizione che segue è opportuno riformulare la definizione di intervallo. Se $x, z \in \mathbb{R}$ e $x < z$, i punti y compresi fra x e z sono tutti e soli quelli rappresentabili nella forma $y = x + \vartheta(z - x)$ con $0 < \vartheta < 1$. Osserviamo che lo scambio di x con z abbinato a quello di ϑ con $1 - \vartheta$ non altera il valore di y e che quando $x = z$ non c'è nulla da richiedere. Allora la restrizione $x < z$ può essere omessa e I è un intervallo se e solo se, per ogni $x, z \in I$ e per ogni ϑ verificante $0 < \vartheta < 1$, anche il punto $x + \vartheta(z - x)$ appartiene a I .

Definizione 3.2. *Una funzione* f *definita in un intervallo* I *a valori in* $\mathbb{R}$ *è detta convessa quando, per ogni* $x, x' \in I$ *e per ogni* $\vartheta \in \mathbb{R}$ *verificante* $0 < \vartheta < 1$ *, risulta*

$$f(x + \vartheta(x' - x)) \leq f(x) + \vartheta\,\{f(x') - f(x)\}\,. \tag{3.1}$$

La funzione f *è poi detta strettamente convessa quando essa è convessa e l'uguaglianza nella* (3.1) *equivale a* $x = x'$ *.*

Si noti che, se (x, y) e (x', y') sono due punti del piano, al variare di ϑ fra 0 e 1 il punto di coordinate $x + \vartheta(x' - x)$ e $y + \vartheta(y' - y)$ descrive il segmento che congiunge i punti dati. Ciò avviene in particolare quando $y = f(x)$ e $y' = f(x')$, per cui la (3.1) esprime che, fissati comunque due punti del grafico di f , nessun punto del segmento che li congiunge può stare sotto l'arco di grafico che li ha come estremi. Nel caso della stretta convessità, poi, i punti del segmento staranno strettamente sopra quelli dell'arco.

Notiamo inoltre che $x = x'$ implica l'uguaglianza nella (3.1), banalmente, per cui f è strettamente convessa se e solo se l'uguaglianza nella (3.1) implica $x = x'$.

3.3. Alcune funzioni strettamente convesse. Per la comodità del lettore diamo un breve elenco di funzioni strettamente convesse (con eventuali restrizioni sul parametro reale se questo interviene). Esse sono definite dalle formule date di volta in volta nei domini individuati dalle rispettive condizioni imposte sulla variabile x .

$\|x\|^\alpha$	$x \in \mathbb{R}$	$\alpha > 1$	a^x	$x \in \mathbb{R}$	$a > 0$ e $\neq 1$
$-\lg_a x$	$x > 0$	$a > 1$	$\lg_a x$	$x > 0$	$0 < a < 1$
$-\sin x$	$0 \leq x \leq \pi$		$-\cos x$	$\|x\| \leq \pi/2$	
$\tan x$	$0 \leq x < \pi/2$		$x \lg_a x$	$x > 0$	$a > 1.$

Notiamo che la verifica della convessità e, a maggior ragione, della stretta convessità secondo la definizione è proibitiva praticamente in tutti i casi interessanti. L'analisi matematica, tuttavia, offre uno strumento efficiente: perché una funzione f definita e dotata di derivata seconda in un intervallo I sia strettamente convessa è sufficiente che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$ (per la convessità è necessario e sufficiente che $f'' \geq 0$). Questo strumento può essere utilizzato, in particolare, per controllare la stretta convessità delle funzioni dell'elenco (con qualche precauzione per quanto riguarda la prima funzione). ■

In vista della disuguaglianza di Jensen è opportuno riscrivere la (3.1) in una forma diversa. Se $0 < \vartheta < 1$ allora i due numeri reali ϑ e $1 - \vartheta$ sono positivi e la loro somma vale 1. D'altra parte, dati comunque due numeri reali ϑ_1 e ϑ_2 in queste condizioni, essi possono essere scritti come ϑ e $1 - \vartheta$ per un certo ϑ verificante $0 < \vartheta < 1$: basta infatti scegliere $\vartheta = \vartheta_1$. Allora, fermo restando che il dominio I della funzione f sia un intervallo, la condizione di convessità si può scrivere come segue:

$$f(\vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2) \le \vartheta_1 f(x_1) + \vartheta_2 f(x_2) \tag{3.2}$$

per ogni $x_1, x_2 \in I$ e $\vartheta_1, \vartheta_2 > 0$ verificanti $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 1$. Analogamente per la stretta convessità: f è convessa e l'uguaglianza in (3.2) equivale a $x_1 = x_2$.

Teorema 3.4. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora, per $n = 2, 3, \ldots$ e per ogni $x_1, \ldots, x_n \in I$ e $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n > 0$ verificanti $\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n = 1$, il punto $\vartheta_1 x_1 + \ldots + \vartheta_n x_n$ appartiene a I e vale la disuguaglianza di Jensen*

$$f(\vartheta_1 x_1 + \ldots + \vartheta_n x_n) \le \vartheta_1 f(x_1) + \ldots + \vartheta_n f(x_n) \tag{3.3}$$

Se inoltre f è strettamente convessa, l'uguaglianza in (3.3) *equivale a $x_1 = \ldots = x_n$.*

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione partendo da $n = 2$. La (3.3) con $n = 2$ coincide con la (3.2), per cui è vera, e altrettanto vale per la seconda parte dell'enunciato.

Supponiamo $n \ge 2$ e assumiamo come ipotesi di induzione che, per tutti i punti x_i e i valori ϑ_i indicati nell'enunciato, il punto $\vartheta_1 x_1 + \ldots + \vartheta_n x_n$ appartenga a I e valga la (3.3). Assumiamo anche che nella (3.3) vale l'uguaglianza se e solo se tutti i punti coincidono fra di loro. Dobbiamo dimostriare che vale l'analogo enunciato relativo a $n+1$ punti $x_1, \ldots, x_{n+1}$ e ad altrettanti valori $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n+1}$. Siano dunque

$$x_1, \ldots, x_{n+1} \in I \qquad e \qquad \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n+1} > 0 \quad \text{tali che} \quad \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{n+1} = 1.$$

Dobbiamo dimostrare che $\vartheta_1 x_1 + \ldots + \vartheta_{n+1} x_{n+1} \in I$, che

$$f(\vartheta_1 x_1 + \ldots + \vartheta_{n+1} x_{n+1}) \le \vartheta_1 f(x_1) + \ldots + \vartheta_{n+1} f(x_{n+1}) \tag{3.4}$$

e che, se in (3.4) vale l'uguaglianza, tutti i punti coincidono fra loro. Osserviamo che $1 - \vartheta_{n+1} = \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n$ e introduciamo il punto

$$x' = \frac{\vartheta_1}{1 - \vartheta_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\vartheta_n}{1 - \vartheta_{n+1}} x_n.$$

Siccome tutti i coefficienti sono positivi e la loro somma vale 1, abbiamo che x' appartiene a I per la prima parte dell'ipotesi di induzione. Siccome I è un intervallo abbiamo

$$\vartheta_1 x_1 + \ldots + \vartheta_{n+1} x_{n+1} = \vartheta_{n+1} x_{n+1} + (1 - \vartheta_{n+1}) x' \in I$$

e siccome f è convessa abbiamo anche

$$\begin{aligned} f(\vartheta_1 x_1 + \ldots + \vartheta_{n+1} x_{n+1}) &= f\big(\vartheta_{n+1} x_{n+1} + (1-\vartheta_{n+1}) x'\big) \\ &\le \vartheta_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\vartheta_{n+1}) f(x'). \end{aligned}$$

Usando la seconda parte dell'ipotesi di induzione otteniamo poi

$$\begin{aligned} &\vartheta_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\vartheta_{n+1}) f(x') \\ &\le \vartheta_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\vartheta_{n+1}) \left\{ \frac{\vartheta_1}{1-\vartheta_{n+1}} f(x_1) + \ldots + \frac{\vartheta_n}{1-\vartheta_{n+1}} f(x_n) \right\} \end{aligned}$$

e combinando con la disuguaglianza precedente deduciamo la (3.4).

Infine, l'uguaglianza nella (3.4) implica che valga l'uguaglianza in ciascuna delle due disuguaglianze precedenti (se uno dei $\le$ fosse $<$, avremmo $<$ nella (3.4)). Usando rispettivamente la stretta convessità di f e l'ultima parte dell'ipotesi di induzione otteniamo allora

$$x_{n+1} = x' \qquad e \qquad x_1 = \ldots = x_n,$$

da cui immediatamente $x_1 = \ldots = x_{n+1}$. ■

4. Medie

Va genericamente sotto il nome di media di n numeri reali dati $x_1, \ldots, x_n$, distinti o meno, ogni numero reale x^* ottenuto con una procedura che garantisca che x^* sia compreso fra il minimo e il massimo dei numeri dati. La più nota delle medie è la *media aritmetica*, definita dalla formula

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \tag{4.1}$$

Nel caso in cui tutti i numeri $x_1, \ldots, x_n$ siano ≥ 0, la *media geometrica* è data da

$$\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\big)^{1/n}. \tag{4.2}$$

Infine, nel caso di numeri strettamente positivi, per ogni numero reale $p \ne 0$, possiamo introdurre la loro *media di ordine* p mediante la formula

$$\mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n} \right)^{1/p}. \tag{4.3}$$

Chiaramente abbiamo $\mathcal{M}_1 = \mathcal{A}$. Grazie alle proprietà delle potenze abbiamo inoltre

$$\frac{1}{\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n)} = \mathcal{G}(1/x_1, \ldots, 1/x_n) \quad e \quad \frac{1}{\mathcal{M}_{-p}(x_1, \ldots, x_n)} = \mathcal{M}_p(1/x_1, \ldots, 1/x_n) \tag{4.4}$$

per ogni $p \ne 0$. L'esclusione di 0 fra i valori di p non è più necessaria se per la media geometrica si usa la notazione alternativa $\mathcal{M}_0$, cioè se si pone

$$\mathcal{M}_0(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.5}$$

Due medie importanti corrispondono ai valori $p = 2$ e $p = -1$: esse si chiamano *media quadratica* e rispettivamente *media armonica* dei numeri considerati. Introdotte le notazioni $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{H}$ per tali medie (*harmonic* in inglese), abbiamo pertanto

$$\mathcal{Q}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} \right)^{1/2} \quad e \quad \frac{1}{\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)} = \mathcal{A}(1/x_1, \ldots, 1/x_n). \tag{4.6}$$

Effettivamente quelle introdotte sono tutte medie nel senso di quanto abbiamo detto all'inizio del paragrafo: ciascuna di esse è compresa fra il minimo e il massimo dei numeri dati, come vediamo tra breve. Abbiamo ad esempio

$$\mathcal{A}(1,3) = 2, \ \mathcal{Q}(1,3) = \sqrt{5}, \ \mathcal{H}(1,3) = \frac{3}{2}, \ \mathcal{G}(1,3) = \sqrt{3}, \ \min\{1,3\} = 1, \ \max\{1,3\} = 3$$

e ciascuna delle medie considerate è compresa fra 1 e 3. Una proprietà comune a tutte le medie introdotte è la seguente

$$\mathcal{M}_p(cx_1, \ldots, cx_n) = c\mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{per ogni } x_1, \ldots, x_n > 0, \ c > 0 \text{ e } p \in \mathbb{R}$$

ove si è usata la convenzione (4.5). Nel caso della media aritmetica, poi, tale uguaglianza vale per numeri di segno qualunque e risulta anche

$$\mathcal{A}(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{A}(y_1, \ldots, y_n) \tag{4.7}$$

qualunque siano i numeri reali considerati. Per gli altri tipi di medie, invece, questa uguaglianza è falsa.

Le varie medie sono legate fra loro da diverse disuguaglianze, che trattiamo nel prossimo paragrafo. Per poter considerare tutti i tipi di medie supporremo d'ora in poi che tutti i numeri reali in questione siano positivi. Tuttavia alcune dei risultati che daremo continuano a valere (purché sensati) se qualcuno dei numeri considerati è nullo (di solito lo si vede banalmente) o addirittura negativo (quando vale la disuguaglianza per i moduli).

5. Disuguaglianze per le medie

Le disuguaglianze fra i vari tipi di medie dipendono da altre disuguaglianze legate alla convessità di certe funzioni. Innanzi tutto specializziamo i coefficienti nella disuguaglianza di Jensen prendendo $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_n$. Il loro valore comune deve dunque essere $1/n$. La (3.3) fornisce allora la disuguaglianza

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right) \le \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \tag{5.1}$$

che può essere riscritta nella forma $f\big(\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n)\big) \le \mathcal{A}\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)$. La (5.1) è detta ancora *disuguaglianza di Jensen* e vale per ogni funzione f convessa e per ogni $x_1, \ldots, x_n$ appartenenti al suo dominio. Se poi f è strettamente convessa, l'uguaglianza in (5.1) equivale a $x_1 = \ldots = x_n$.

Teorema 5.1. *Vale la disuguaglianza di Young*

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \le \vartheta_1 x_1^{1/\vartheta_1} + \ldots + \vartheta_n x_n^{1/\vartheta_n} \tag{5.2}$$

per ogni $x_1, \ldots, x_n > 0$ *e* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n > 0$ *tali che* $\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n = 1$ *. Inoltre, nel caso particolare* $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_n = 1/n$ *, l'uguaglianza nella* (5.2) *equivale a* $x_1 = \ldots = x_n$ *.*

Dimostrazione. Ci basiamo su due propietà della seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 2^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

la sua stretta convessità (vedi 3.3) e il fatto che ogni numero reale $x > 0$ può essere scritto nella forma $x = 2^y$ per uno e un solo numero reale y (il logaritmo). Dati ora i punti x_i e i numeri positivi ϑ_i $(i = 1, \ldots, n)$ come specificato nell'enunciato, possiamo introdurre i numeri reali y_i e z_i mediante le formule

$$2^{y_i} = x_i \quad e \quad z_i = \frac{y_i}{\vartheta_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Applicando la disuguaglianza (3.3) di Jensen alla funzione convessa f abbiamo allora

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n &= 2^{\vartheta_1 z_1} \cdot \ldots \cdot 2^{\vartheta_n z_n} = 2^{\vartheta_1 z_1 + \ldots + \vartheta_n z_n} \\ &\le \vartheta_1 2^{z_1} + \ldots + \vartheta_n 2^{z_n} = \vartheta_1 x_1^{1/\vartheta_1} + \ldots + \vartheta_n x_1^{1/\vartheta_n} \end{aligned}$$

cioè la (5.2).

Supponiamo ora $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_n = 1/n$. Se nella (5.2) vale l'uguaglianza, allora deve valere l'uguaglianza nella disuguaglianza di Jensen appena applicata e, per la stretta convessità di f, deduciamo $z_1 = \ldots = z_n$, da cui $x_1 = \ldots = x_n$ essendo $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_n$. Viceversa, se $x_1 = \ldots = x_n = x$, calcolando direttamente i due membri della (5.2) vediamo che entrambi valgono x^n. ∎

Abbiamo ad esempio

$$ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \qquad (n = 2,\ \vartheta_1 = \vartheta_2 = 1/2)$$

disuguaglianza che può essere dedotta elementarmente da $(a - b)^2 \ge 0$. Risulta allora evidente anche che l'uguaglianza equivale ad $a = b$.

Teorema 5.2. *Siano* $x_1, \ldots, x_n > 0$ *e* p *reale. Allora valgono le disuguaglianze*

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \le \mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) \le \max\{x_1, \ldots, x_n\}. \tag{5.3}$$

Inoltre $\mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n)$ *cresce al crescere di* p *, cioè*

$$p' < p'' \quad \text{implica} \quad \mathcal{M}_{p'}(x_1, \ldots, x_n) \le \mathcal{M}_{p''}(x_1, \ldots, x_n). \tag{5.4}$$

In particolare

$$\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n) \le \mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n) \le \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) \le \mathcal{Q}(x_1, \ldots, x_n). \tag{5.5}$$

Infine, per ciascuna delle disuguaglianze considerate nell'enunciato, vale l'uguaglianza se e solo se $x_1 = \ldots = x_n$ *.*

Dimostrazione. Ciascuna delle due disuguaglianze (5.3) si dimostra distinguendo i tre casi $p > 0$, $p < 0$ e $p = 0$, ma le sei dimostrazioni sono analoghe. Per fissare le idee consideriamo la prima delle (5.3) con $p > 0$. Sia $x_* = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$. Allora $x_* > 0$ e, per $k = 1, \ldots, n$, risulta $x_k \geq x_*$, da cui $x_k^p \geq x_*^p$. Sommando membro a membro e dividendo per n otteniamo

$$\mathcal{M}_p(x_*, \ldots, x_*) \leq \mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_1).$$

Ma il primo membro di questa disuguaglianza vale x_* e dunque coincide con il primo membro della disuguaglianza da dimostrare.

Dimostriamo ora l'ultima parte dell'enunciato relativamente alla disuguaglianza appena considerata. Rivedendo la dimostrazione fatta, risulta chiaro che vale l'uguaglianza se e solo se vale l'uguaglianza in ciascuna delle disuguaglianze utilizzate (basterebbe un solo $<$ per avere $<$ alla fine e si ottiene l'uguaglianza alla fine se si utilizzano solo uguaglianze), cioè se e solo se $x_k = x_*$ per $k = 1, \ldots, n$, cioè se e solo se tutti i numeri considerati sono uguali fra loro.

Dimostriamo ora la (5.4) distinguendo i vari casi corrispondenti all'annullamento o meno di p' e p'' e ai segni di questi parametri. Iniziamo dal caso $p' = 0$ e $p'' = p > 0$, vale a dire

$$\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{se } p > 0\,. \tag{5.6}$$

Applichiamo la disuguaglianza di Young con $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_n = 1/n$ ai numeri positivi $x_i^{p/n}$. Otteniamo

$$x_1^{p/n} \cdot \ldots \cdot x_1^{p/n} \leq \frac{(x_1^{p/n})^n + \ldots + (x_1^{p/n})^n}{n}\,.$$

Il primo membro vale

$$x_1^{p/n} \cdot \ldots \cdot x_1^{p/n} = \bigl(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\bigr)^{p/n} = \Bigl\{\bigl(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\bigr)^{1/n}\Bigr\}^p = \bigl(\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n)\bigr)^p.$$

D'altra parte abbiamo

$$\frac{(x_1^{p/n})^n + \ldots + (x_1^{p/n})^n}{n} = \frac{x_1^p + \ldots + x_1^p}{n} = \bigl(\mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n)\bigr)^p.$$

Dunque $(\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n))^p \leq (\mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n))^p$, da cui la disuguaglianza voluta.

Passiamo al caso $p' = -p < 0$ e $p'' = 0$, vale a dire

$$\mathcal{M}_{-p}(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{se } p > 0\,. \tag{5.7}$$

Applicando la (5.6), appena dimostrata, ai numeri $1/x_1, \ldots, 1/x_n$ abbiamo

$$\mathcal{G}(1/x_1, \ldots, 1/x_n) \leq \mathcal{M}_p(1/x_1, \ldots, 1/x_n).$$

Tenendo conto della (4.4) deduciamo

$$\frac{1}{\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n)} \leq \frac{1}{\mathcal{M}_{-p}(x_1, \ldots, x_n)}$$

da cui la disuguaglianza voluta.

Nel prossimo caso che consideriamo p' e p'' hanno segno opposto. Allora abbiamo necessariamente $p' < 0 < p''$ e la (5.4) segue dalle (5.6) e (5.7).

Supponiamo ora p' e p'' entrambi positivi. La dimostrazione in questo caso si fonda sulla stretta convessità della funzione $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$ nel caso $\alpha > 1$ (vedi 3.3). Noi scegliamo $\alpha = p''/p'$, che è > 1 dato che $0 < p' < p''$. Applicando la disuguaglianza (5.1) di Jensen ai numeri $x_1^{p'}, \ldots, x_n^{p'}$ otteniamo

$$\left(\frac{x_1^{p'} + \ldots + x_n^{p'}}{n}\right)^{p''/p'} \leq \frac{(x_1^{p'})^{p''/p'} + \ldots + (x_n^{p'})^{p''/p'}}{n}$$

vale a dire

$$\big(\mathcal{M}_{p'}(x_1, \ldots, x_n)\big)^{p''} \leq \big(\mathcal{M}_{p''}(x_1, \ldots, x_n)\big)^{p''}$$

da cui la (5.4).

Nell'ultimo caso da considerare abbiamo $p' < p'' < 0$ e possiamo scrivere $p' = -q''$ e $p'' = -q'$ con $0 < q' < q''$. Osservato che q' e q'' rientrano nel caso appena trattato, applichiamo la (5.4) alle medie $\mathcal{M}_{q'}$ e $\mathcal{M}_{q''}$ dei reciproci dei numeri x_i. Otteniamo

$$\mathcal{M}_{q'}(1/x_1, \ldots, 1/x_n) \leq \mathcal{M}_{q''}(1/x_1, \ldots, 1/x_n)$$

e la (5.4) segue subito dalla (4.4).

Veniamo all'ultima parte dell'enunciato (a parte le (5.3) per le quali il discorso è concluso). Osservato che abbiamo usato la (5.2) con $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_n$ e che abbiamo applicato la (5.1) solo a funzioni strettamente convesse, vediamo che l'uguaglianza in una delle (5.4) o delle (5.5) equivale all'uguaglianza in una delle disuguaglianze di Young o di Jensen utilizzate, cioè a $x_1 = \ldots = x_n$. ∎

Dimostriamo ora le *disuguaglianze di Hölder, Schwarz e Minkowski*. segnalando che le prime due sono dette anche *disuguaglianza di Schwarz–Hölder* e, rispettivamente, *disuguaglianza di Cauchy–Schwarz*.

Teorema 5.3. *Siano $p, q > 1$ tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{5.8}$$

Allora vale la disuguaglianza di Hölder

$$\mathcal{A}(x_1y_1, \ldots, x_ny_n) \leq \mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n)\, \mathcal{M}_q(y_1, \ldots, y_n) \tag{5.9}$$

qualunque siano i numeri reali positivi considerati.

Dimostrazione. Poniamo per comodità

$$X = \mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) \qquad e \qquad Y = \mathcal{M}_q(y_1, \ldots, y_n).$$

Sia $\lambda > 0$. Per $k = 1, \ldots, n$ applichiamo la disuguaglianza (5.2) di Young a λx_k e a $\lambda^{-1} y_k$ con $\vartheta_1 = 1/p$ e $\vartheta_2 = 1/q$. Abbiamo

$$x_k y_k = \lambda x_k \cdot \lambda^{-1} y_k \le \frac{1}{p} \lambda^p x_k^p + \frac{1}{q} \lambda^{-q} y_k^q.$$

Sommando membro a membro e dividendo per n otteniamo

$$\mathcal{A}(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) \le \frac{\lambda^p}{p} X^p + \frac{\lambda^{-q}}{q} Y^q.$$

Scegliamo ora $\lambda > 0$ in modo che $\lambda^p X^p = XY$ e $\lambda^{-q} Y^q = XY$, se possibile. Queste uguaglianze sono realizzate con $\lambda = X^{-1+1/p} Y^{1/p}$ e con $\lambda = X^{-1/q} Y^{1-1/q}$ rispettivamente. Ma tali scelte coincidono per la (5.8). Abbiamo dunque

$$\mathcal{A}(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) \le \frac{1}{p} XY + \frac{1}{q} XY = XY$$

ancora per la (5.8). ■

Teorema 5.4. *Vale la disuguaglianza di Schwarz*

$$\mathcal{A}(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) \le \mathcal{Q}(x_1, \ldots, x_n)\, \mathcal{Q}(y_1, \ldots, y_n) \tag{5.10}$$

qualunque siano i numeri reali positivi considerati. Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $x_1, \ldots, x_n$ *e* $y_1, \ldots, y_n$ *sono direttamente proporzionali.*

Dimostrazione. La (5.10) coincide con la (5.9) nel caso $p = q = 2$, per cui dobbiamo dimostrare solo la seconda parte dell'enunciato.

Se abbiamo proporzionalità diretta, allora $y_k = c x_k$ per $k = 1, \ldots, n$ e per un certo $c > 0$ e il calcolo diretto mostra che $\mathcal{A}(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) = c(\mathcal{Q}(x_1, \ldots, x_n))^2$ e dunque coincide con il secondo membro della (5.10).

Viceversa, supponiamo che nella (5.10) valga l'uguaglianza. Se riprendiamo la dimostrazione del Teorema 5.3 e le notazioni introdotte, vediamo che l'uguaglianza nella (5.9) implica l'uguaglianza in tutte le disuguaglianze utilizzate (basterebbe un solo $<$ per avere $<$ alla fine), in particolare nelle disuguaglianze di Young. Siccome è ora $p = q = 2$, deduciamo

$$\lambda x_k = \lambda^{-1} y_k \quad \text{per } k = 1, \ldots, n \tag{5.11}$$

ove λ è il valore che avevamo scelto. In particolare c'è proporzionalità diretta. ■

Teorema 5.5. *Sia* $p \ge 1$. *Allora vale la disuguaglianza di Minkowski*

$$\mathcal{M}_p(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \le \mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{M}_p(y_1, \ldots, y_n) \tag{5.12}$$

qualunque siano i numeri positivi considerati.

Dimostrazione. Il caso $p = 1$ segue dalla formula (4.7), più precisa. Supponiamo allora $p > 1$ e introduciamo l'unico numero reale $q > 1$ che verifica la (5.8). Posto per comodità $z_k = x_k + y_k$ per $k = 1, \ldots, n$ e tenendo conto che $(p-1)q = p$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&\big(\mathcal{M}_p(z_1, \ldots, z_n)\big)^p = \frac{1}{n}(z_1^p + \ldots + z_n^p) \\
&= \frac{1}{n}(x_1 z_1^{p-1} + \ldots + x_n z_n^{p-1}) + \frac{1}{n}(y_1 z_1^{p-1} + \ldots + y_n z_n^{p-1}) \\
&= \mathcal{A}(x_1 z_1^{p-1}, \ldots, x_n z_n^{p-1}) + \mathcal{A}(y_1 z_1^{p-1}, \ldots, x_n z_n^{p-1}) \\
&\le \mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n)\, \mathcal{M}_q(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}) + \mathcal{M}_p(y_1, \ldots, y_n)\, \mathcal{M}_q(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}) \\
&= \{\mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{M}_p(y_1, \ldots, y_n)\}\, \mathcal{M}_q(z_1^{p-1}, \ldots, z_n^{p-1}) \\
&= \{\mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{M}_p(y_1, \ldots, y_n)\} \cdot n^{-1/q}\big(z_1^{(p-1)q} + \ldots + z_n^{(p-1)q}\big)^{1/q} \\
&= \{\mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{M}_p(y_1, \ldots, y_n)\} \cdot n^{-1/q}(z_1^p + \ldots + z_n^p)^{1/q} \\
&= \{\mathcal{M}_p(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{M}_p(y_1, \ldots, y_n)\}\, \big(\mathcal{M}_p(z_1, \ldots, z_n)\big)^{p/q}.
\end{aligned}$$

Dividendo per $\big(\mathcal{M}_q(z_1, \ldots, z_n)\big)^{p/q}$ otteniamo la (5.12) in quanto $p - p/q = 1$. ■

Concludiamo il paragrafo dimostrando due disuguaglianze, dette *disuguaglianze di Chebychev*, che riguardano i legami fra le operazioni di media aritmetica e di prodotto e valgono per numeri reali di segno qualunque.

Teorema 5.6. *Siano* $(x_1, \ldots, x_n)$ *e* $(y_1, \ldots, y_n)$ *due* n*-uple di numeri reali e si supponga che* $x_1 \le \ldots \le x_n$ *. Se* $y_1 \le \ldots \le y_n$ *allora risulta*

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathcal{A}(y_1, \ldots, y_n) \le \mathcal{A}(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) \tag{5.13}$$

mentre la disuguaglianza opposta

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathcal{A}(y_1, \ldots, y_n) \ge \mathcal{A}(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) \tag{5.14}$$

vale se $y_1 \ge \ldots \ge y_n$ *.*

Dimostrazione. Le dimostrazioni si basano sulle due disuguaglianze di riordinamento (2.3) e (2.4) e sono analoghe, per cui dimostriamo solo la (5.13). Permutiamo ciclicamente gli elementi di $(y_1, \ldots, y_n)$ ottenendo i riordinamenti

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (y_2, y_3, \ldots, y_1), \ \ldots \ (y_n, y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Applicando la (2.3) abbiamo le n disuguaglianze

$$\begin{aligned}
x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n &\le x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \\
x_1 y_2 + x_2 y_3 + \ldots + x_n y_1 &\le x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1 y_n + x_2 y_1 + \ldots + x_n y_{n-1} &\le x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.
\end{aligned}$$

e sommandole membro a membro deduciamo

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \le n(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n).$$

Allora la (5.13) segue dividendo per n^2 . ■

6. Problemi

Problema 1. Dimostrare che $2^n > n$ per ogni numero naturale n.

Problema 2. Dimostrare che $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ per ogni $n \geq 2$.

Problema 3. Dimostrare che $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per ogni $n \geq 2$.

Problema 4. Trovare una formula del tipo $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = P(n)$ per ogni $n \geq 2$, ove P è un polinomio di quarto grado a coefficienti razionali.

Problema 5. Dimostrare che $a^{m+n} = a^m a^n$ per ogni a reale non nullo e $m, n \in \mathbb{N}$.

Problema 6. Dimostrare le due varianti del principio di induzione segnalate sopra. Si può procedere imitando la dimostrazione del Teorema 2.2 oppure applicando lo stesso teorema a successioni $\{q_n\}$ opportune costruite a partire dalla $\{p_n\}$ data.

Problema 7. Calcolare la somma $s = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2001$ dei numeri naturali dispari fino a 2001.

Problema 8. Calcolare la somma $s = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 101^2$ dei quadrati dei numeri naturali dispari fino a 101^2.

Problema 9. Dimostrare, ragionando per induzione sul numero di lati, che ogni poligono convesso di n lati ha $n(n-3)/2$ diagonali.

Problema 10. Dando per assodato il ben noto risultato sui triangoli, dimostrare, ragionando per induzione sul numero di lati, che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati vale $n-2$ angoli piatti.

Problema 11. Determinare i numeri naturali $n \geq 2$ tali che $3^n > \pi_n$, ove π_n denota il prodotto dei numeri naturali da 1 a n, giustificando bene la risposta.

Problema 12. Trovare l'errore nella dimostrazione che segue. Si pretende di dimostrare che tutte le ragazze sono bionde. Procediamo per induzione sul numero di ragazze dimostrando che, per ogni $n \geq 1$, prese comunque n ragazze, queste sono tutte bionde. Assunto il fatto come vero nel caso di n ragazze, deduciamo l'analogo con $n+1$ al posto di n. Si prendano dunque $n+1$ ragazze qualunque $r_1, \ldots, r_{n+1}$. Si considerino le prime n, cioè $r_1, \ldots, r_n$: per l'ipotesi di induzione queste sono tutte bionde. La stessa cosa avviene per le n ragazze $r_2, \ldots, r_{n+1}$. Dunque tutte le $n+1$ ragazze sono bionde. Il principio di induzione permette dunque di concludere.

Problema 13. Trovare l'errore nella dimostrazione che segue. Si pretende di dimostrare che ogni insieme finito possiede un elemento solo. Procediamo per induzione sul numero n degli elementi degli insiemi finiti considerati dimostrando che, per ogni n e per ogni insieme A di n elementi, tutti gli elementi di A sono uguali fra loro. Se $n = 1$ il fatto è vero, ovviamente. Supponiamo ora il fatto vero nel caso di n elementi e dimostriamo l'analogo con $n+1$ al posto di n. Sia dunque A un insieme di $n+1$ elementi e siano questi $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Si considerino i primi n elementi di A, cioè $a_1, \ldots, a_n$: per l'ipotesi di induzione questi sono tutti uguali fra loro. La stessa cosa avviene per gli n elementi

$a_2, \ldots, a_{n+1}$. Dunque tutti gli $n+1$ elementi di A sono uguali fra loro. Il principio di induzione permette dunque di concludere.

Problema 14. Dimostrare la *disuguaglianza di Bernoulli*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e x reale > -1.

Problema 15. Dimostrare che, fra i poligoni (convessi) di n lati inscritti in un cerchio dato, quelli che hanno perimetro massimo coincidono con quelli regolari e che la stessa cosa vale per quelli di area massima.

Problema 16. Dimostrare le disuguaglianze

$$ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2, \qquad ab^2 \leq \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}b^3 \qquad e \qquad ab^2 \leq \frac{64}{3}a^3 + \frac{1}{12}b^3$$

per a, b reali positivi.

Problema 17. Massimizzare l'area fra i rettangoli di perimetro assegnato.

Problema 18. Minimizzare il perimetro fra i rettangoli di area assegnata.

Problema 19. Massimizzare il volume dei parallelepipedi rettangoli dei quali è data la somma degli spigoli.

Problema 20. Minimizzare la somma degli spigoli dei parallelepipedi rettangoli di volume assegnato.

Problema 21. Minimizzare il perimetro dei rombi di area assegnata.

Problema 22. Massimizzare l'area dei rombi di perimetro assegnato.

Problema 23. Massimizzare l'area dei rettangoli inscritti in un cerchio dato.

Problema 24. Minimizzare il raggio del cerchio circoscritto ai rettangoli di area assegnata.

Problema 25. Minimizzare l'area dei rombi circoscritti a un cerchio dato.

Problema 26. Minimizzare il perimetro dei rombi circoscritti a un cerchio dato.

Problema 27. Massimizzare il volume di un parallelepipedo rettangolo inscritto in una sfera data.

Problema 28. Dimostrare che se la somma di n numeri reali positivi è $\leq n$ allora il loro prodotto è ≤ 1.

Problema 29. Dimostrare che se la somma dei quadrati di n numeri reali positivi è $\leq n^2$ allora la somma dei numeri dati è $\leq \sqrt{n}$.

Problema 30. Dimostrare che se il prodotto di n numeri reali positivi è ≤ 1 allora la somma dei reciproci dei numeri dati è $\geq n$.

Problema 31. Siano $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tali che $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Dimostrare che per ogni $x, y, z > 0$ vale la disuguaglianza

$$x + y + z \geq x^\alpha y^\beta z^\gamma + y^\alpha z^\beta x^\gamma + z^\alpha x^\beta y^\gamma$$

e che vale l'uguaglianza se e solo se $x = y = z$.

Problema 32. Dimostrare che $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ per ogni $a, b, c > 0$

Problema 33. Massimizzare l'area totale di un parallelepipedo rettangolo inscritto in una sfera data.

Problema 34. Massimizzare il volume di un parallelepipedo rettangolo di area totale assegnata.

Problema 35. Minimizzare l'area totale di un parallelepipedo rettangolo di volume assegnato.

Problema 36. Sia C un cilindro circolare retto di volume V e area totale A. Dimostrare che

$$A^3 \geq 54\pi V^2$$

e che vale l'uguaglianza se e solo se l'altezza di C è uguale al diametro di base.

Problema 37. Siano $x, y, z > 0$. Dimostrare che

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} + \frac{2}{x+y} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Problema 38. Massimizzare xy sotto le condizioni $x, y > 0$ e $x + 2y = 1$.

Problema 39. Massimizzare $x^2 y$ sotto le condizioni $x, y > 0$ e $x + 2y = 1$.

Problema 40. Massimizzare $x^2 y^3$ sotto le condizioni $x, y > 0$ e $3x + 2y = 2$.

Problema 41. Minimizzare $4x^2 + 9y^2$ sotto le condizioni $x, y > 0$ e $xy^2 = 1$.

Problema 42. Massimizzare xy sotto le condizioni $x, y > 0$ e $(x+y)(x^2+y^2) = 1$.

Problema 43. Siano $x, y, z > 0$ tali che $x+y+z = 1$. Dimostrare che $xy+xz+yz \leq 1/3$.

Problema 44. Siano $x_1, \ldots, x_n$ tali che $0 < x_k < 1$ per $k = 1, \ldots, n$ e $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Dimostrare che

$$\frac{x_1}{1-x_1} + \ldots + \frac{x_n}{1-x_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Problema 45. Siano $x_1, \ldots, x_n$ reali positivi e sia $(y_1, \ldots, y_n)$ una permutazione di $(x_1, \ldots, x_n)$. Dimostrare che vale la disuguaglianza

$$\frac{x_1}{y_1} + \ldots + \frac{x_n}{y_n} \geq n.$$

7. Soluzioni di alcuni problemi

Problema 4. $s_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Problema 6. Seguendo la seconda idea, nel caso della prima variante si pone $q_n = p_{n+5}$, mentre nel caso della seconda si pone $q_0 = p_0$, $q_1 = p_0 \wedge p_1$, $q_2 = p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$, eccetera, ove $\wedge$ sta per "e".

Problema 7. $s_n = 1+3+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$ (lo si dimostra per induzuione) per cui $s = s_{1000} = 1001^2 = 1.002.001$.

Problema 8. $s_n = 1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2 = \frac{1}{2}(n+1)(4n^2+8n+3)$ (lo si dimostra per induzuione) per cui $s = s_{50} = 176.851$.

Problema 12. Innanzi tutto manca il controllo della prima ipotesi, diciamo della variante che corrisponde a iniziare da $n = 1$, che è falsa. Per quanto riguarda la seconda, la dimostrazione pretende che fra le ragazze $r_1, \ldots, r_n$ e $r_2, \ldots, r_{n+1}$ ve ne sia una comune, il che è vero solo se $n \geq 2$.

Problema 13. La dimostrazione pretende che fra gli elementi $a_1, \ldots, a_n$ e gli elementi $a_2, \ldots, a_{n+1}$ ve ne sia uno comune, il che è vero solo se $n \geq 2$.

Problema 14. Usare il Principio di induzione.

Problema 15. Denotiamo con G il poligono, con P e A il suo perimetro e la sua area e con r il raggio del cerchio. Possiamo supporre che il centro sia interno a G (altrimenti si costruisce facilmente un poligono con perimetro e area maggiori). Congiungendo il centro con i vertici otteniamo n triangoli $T_1, \ldots, T_n$. Per $k = 1, \ldots, n$ denotiamo con ℓ_k e h_k il lato di T_k che è anche lato di G e la relativa altezza (e anche le rispettive lunghezze) e chiamiamo α_k l'angolo opposto. Abbiamo allora

$$\ell_k = 2r\sin(\alpha_k/2) \qquad e \qquad h_k = r\cos(\alpha_k/2)$$

da cui immediatamente

$$P = 2r\big(\sin(\alpha_1/2) + \ldots + \sin(\alpha_k/2)\big)$$

e anche

$$A = r^2\big(\sin(\alpha_1/2)\cos(\alpha_1/2) + \ldots + \sin(\alpha_n/2)\cos(\alpha_n/2)\big) = \frac{r^2}{2}\big(\sin\alpha_1 + \ldots + \sin\alpha_k\big).$$

Per la disuguaglianza di Jensen applicata alla funzione $f(x) = -\sin x$, $0 < x < \pi$, (e cambiati poi i segni) abbiamo allora

$$P \leq 2nr\sin\frac{(\alpha_1/2) + \ldots + (\alpha_n/2)}{n} \qquad e \qquad A \leq \frac{nr^2}{2}\sin\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} .$$

Ma $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 2\pi$ dato che il centro è interno a G. Dunque

$$P \le 2nr \sin(\pi/n) \qquad e \qquad A \le \frac{nr^2}{2} \sin(2\pi/n).$$

Siccome la scelta $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$ realizza le uguaglianze, essa rende massimi perimetro e area. Allora ogni scelta che rende massimo il perimetro o massima l'area realizza l'uguaglianza corrispondente. Ma ciascuna delle due uguaglianze equivale all'uguaglianza nella corrispondente disuguaglianza di Jensen utilizzata, cioè al fatto che $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$ (data la stretta convessità della funzione considerata), cioè al fatto che G è regolare.

Problema 16. Sono disuguaglianze di Young applicate a multipli opportuni di a e b e con valori opportuni di ϑ_1 e ϑ_2.

Problema 17. $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ sui lati: si ottiene il quadrato.

Problema 18. $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ sui lati: si ottiene il quadrato.

Problema 19. $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ sugli spigoli: si ottiene il cubo.

Problema 20. $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ sugli spigoli: si ottiene il cubo.

Problema 21. $\mathcal{G} \le \mathcal{Q}$ sulle semidiagonali: si ottiene il quadrato.

Problema 22. $\mathcal{G} \le \mathcal{Q}$ sulle semidiagonali: si ottiene il quadrato.

Problema 23. $\mathcal{G} \le \mathcal{Q}$ sui lati: si ottiene il quadrato.

Problema 24. $\mathcal{G} \le \mathcal{Q}$ sui lati: si ottiene il quadrato.

Problema 25. $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ sulle due parti in cui un lato è suddiviso dal punto di tangenza: si ottiene il quadrato.

Problema 26. $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ sulle due parti in cui un lato è suddiviso dal punto di tangenza: si ottiene il quadrato.

Problema 27. $\mathcal{G} \le \mathcal{Q}$ sugli spigoli: si ottiene il cubo.

Problema 28. $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$

Problema 29. $\mathcal{A} \le \mathcal{Q}$

Problema 30. Usare la (4.4) e $\mathcal{H} \le \mathcal{G}$, oppure $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ sui reciproci.

Problema 31. Applicare la disuguaglianza di Young ai tre prodotti del secondo membro e sommare.

Problema 32. $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ a due a due, poi moltiplicare.

Problema 33. $\mathcal{G} \le \mathcal{Q}$ sugli spigoli a due a due, poi sommare: si ottiene il cubo.

Problema 34. $\mathcal{G} \le \mathcal{Q}$ sulle aree delle facce a due a due, poi sommare: si ottiene il cubo.

Problema 35. $\mathcal{G} \le \mathcal{Q}$ sulle aree delle facce a due a due, poi sommare: si ottiene il cubo.

Problema 36. Siano r il raggio e h l'altezza. Allora

$$V = \pi r^2 h \qquad e \qquad A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Dalla disuguaglianza $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ abbiamo

$$\mathcal{G}(r, h/2, h/2) \le \mathcal{A}(r, h/2, h/2), \quad \text{cioè} \quad \left(r\frac{h^2}{4}\right)^{1/3} \le \frac{r+h}{3}$$

e deduciamo successivamente

$$r\left(r\frac{h^2}{4}\right)^{1/3} \le r\frac{r+h}{3}, \quad 4^{-1/3}(r^2h)^{2/3} \le \frac{r^2+rh}{3}, \quad 4^{-1/3}(V/\pi)^{2/3} \le \frac{A}{6\pi}.$$

Elevando al cubo e riordinando si ha la relazione voluta. L'uguaglianza in tale relazione equivale all'uguaglianza nella disuguaglianza $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ usata sopra, dunque all'uguaglianza $r = h/2$, cioè a $h = 2r$.

Problema 37. Dalla (4.4) e $\mathcal{H} \le \mathcal{A}$ risulta

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2\mathcal{A}(1/x, 1/y) = \frac{2}{\mathcal{H}(x,y)} \ge \frac{2}{\mathcal{A}(x,y)} = \frac{4}{x+y}.$$

Trovate le altre due disuguaglianze analoghe e sommando membro a membro si deduce facilmente la prima delle disuguaglianze da dimostrare. Per la seconda usiamo ancora la (4.4) e $\mathcal{H} \le \mathcal{A}$ e otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} + \frac{2}{x+y} &= 3\mathcal{A}\left(\frac{2}{y+z}, \frac{2}{z+x}, \frac{2}{x+y}\right) \\ &= \frac{3}{\mathcal{H}\left(\frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}, \frac{x+y}{2}\right)} \ge \frac{3}{\mathcal{A}\left(\frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}, \frac{x+y}{2}\right)} = \frac{9}{x+y+z}.\end{aligned}$$

Problema 38. Applicare $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ a x e $2y$.

Problema 39. Applicare $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ a $x/2$, $x/2$ e $2y$.

Problema 40. Applicare $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ a $3x/2$, $3x/2$, $2y/3$, $2y/3$ e $2y/3$.

Problema 41. Applicare $\mathcal{A} \geq \mathcal{G}$ ai numeri $4x^2$, $9y^2/2$ e $9y^2/2$.

Problema 42. Usiamo le abbreviazioni a , g e q per le medie aritmetica, geometrica e quadratica di x e y . La quantità da massimizzare è g^2 mentre il vincolo diventa $aq^2 = 1/4$. Cerchiamo allora di usare contemporaneamente le due disuguaglianze $g \leq a$ e $g \leq q$, con l'accortezza di far comparire una potenza di aq^2 al secondo membro. Occorre dunque decomporre g^2 in modo astuto. Abbiamo

$$xy = g^2 = g^{2/3} \cdot g^{4/3} \leq a^{2/3} \cdot q^{4/3} = (aq^2)^{2/3} = (1/4)^{2/3} = 2^{-4/3}$$

e il valore $2^{-4/3}$ si raggiunge se si riesce a ottenere l'uguaglianza in entrambe le disuguaglianze usate. Ma ciò avviene quando $x = y$, se possibile. Abbinando l'equazione $x = y$ al vincolo $aq^2 = 1/4$ si vede facilmente che si trova una (unica) soluzione: $x = y = 2^{-2/3}$.

Problema 43. Sia $S = xy + xz + yz$. Allora

$$1 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2S = 3(\mathcal{Q}(x, y, z))^2 + 2S$$

da cui

$$S \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\mathcal{Q}(x, y, z))^2.$$

Ma $\mathcal{Q}(x, y, z) \geq \mathcal{A}(x, y, z) = 1/3$ da cui facilmente la tesi.

Problema 44. Poniamo $y_k = 1 - x_k$. Allora $0 < y_k < 1$ per $k = 1, \dots, n$ e $y_1 + \dots + y_n = n - 1$. Usando la (4.4) e $\mathcal{H} \leq \mathcal{A}$ otteniamo allora

$$\begin{aligned} &\frac{x_1}{1 - x_1} + \dots + \frac{x_n}{1 - x_n} = \frac{1 - y_1}{y_1} + \dots + \frac{1 - y_n}{y_n} \\ &\frac{1}{y_1} + \dots + \frac{1}{y_n} - n = n\mathcal{A}(1/y_1, \dots, 1/y_n) - n = \frac{n}{\mathcal{H}(y_1, \dots, y_n)} - n \\ &\geq \frac{n}{\mathcal{A}(y_1, \dots, y_n)} - n = \frac{n}{\frac{n-1}{n}} - n = \frac{n}{n - 1} . \end{aligned}$$

Problema 45. Cambiando, se occorre, l'ordine degli addendi ci si riconduce al caso in cui $x_1 \leq \dots \leq x_n$. Allora $1/x_1 \geq \dots \geq 1/x_n$. D'altra parte $(1/y_1, \dots, y_n)$ è un riordinamento di $(1/x_2, \dots, 1/x_n)$ e la seconda disuguaglianza di riordinamento fornisce

$$\frac{x_1}{y_1} + \dots + \frac{x_n}{y_n} = x_1 \frac{1}{y_1} + \dots + x_n \frac{1}{y_n} \geq x_1 \frac{1}{x_1} + \dots + x_n \frac{1}{x_n} = n.$$